Tomo I: Macrodinámica - Modelos de Ciclos Econ�omicos Reales

Book · July 2017

2 authors:


Hamilton Galindo
Arizona State University


Alexis Montecinos
Suffolk University - Sawyer Business School and Universidad Adolfo Ibáñez

Tomo I: Macrodinámica
Modelos de Ciclos Económicos Reales[1]

Hamilton Galindo
Arizona State University (ASU)
hamilton.galindo@asu.edu

Alexis Montecinos
Massachusetts Institute of Technology (MIT)
alexis.montecinos@sloan.mit.edu

Borrador: 8 de julio de 2017

[1]Disclaimer: cualquier error u omisión es responsabilidad de los autores.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Introducción

El objetivo de este libro es acompañar al estudiante en el desarrollo paso a paso de un modelo DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*). No solo desde los aspectos técnicos y conceptuales sino también en el proceso de simulación de cada modelo. En la literatura existen libros excelentes que abordan diferentes aspectos de los modelos DSGE. Dado lo abundante del tema y la limitación del espacio, estos excelentes libros no abordan paso a paso la construcción de los modelos DSGE. Este libro pretende en cierto grado llenar esta brecha.

Vale la pena resaltar tres características de este libro. La primera es que se procura realizar todo el álgebra asociado a cada modelo. Por ejemplo, la optimización de cada agente se realiza paso a paso, de igual forma con el calculo de estado estacionario y con la log-linealización. Asimismo, el método de solución de coeficientes indeterminados, y de Blanchard y Kahn son desarrollados con especial detalle. El fin de todo ello es que el estudiante gane entendimiento en cada una de las etapas de la construcción del modelo.

La segunda característica es que cada modelo desarrollado en cada capítulo se ha colocado en Dynare. Además, se han construido algunos m-file para ciertos temas específicos como por ejemplo la comparación de modelos. El objetivo de todos estos códigos es que el estudiante pueda replicar exactamente lo que encuentra en el capítulo. Esto genera un aprendizaje *learning by doing.*

La tercera característica es que los modelos considerados son, al menos en esta primera edición, *toy models.* Esto permite que el estudiante aprenda las lecciones básicas y entienda las relaciones fundamentales de las variables. Todo ello lo preparará para abordar modelos más complejos.

¿Por qué tomo I?
Los modelos DSGE abarcan modelos de Ciclos Económicos Reales (RBC), modelos de la Nueva Economía Keynesiana (NEK) y modelos RBC y NEK con fricciones financieras. Abordar los detalles de todos estos modelos en un solo libro es muy complejo e inclusive no didactico. Por ello, hemos pensado abordar todos estos modelos en tres tomos: el primero solo centrado en los modelos RBC, el segundo solo centrado en los modelos NEK y el tercero centrado en los modelos DSGE con fricciones financieras. En un futuro cercano esperamos tener la primera edición del segundo tomo.

Página Web del libro
En la siguiente página "www.hamiltongalindo.com" encontrarán las presentaciones de cada

capítulo como también los códigos (Dynare y m-file) para replicar cada modelo.

Capítulo 1

Panorama de los modelos RBC

1.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es brindar un panorama del desarrollo de la escuela de Ciclos Económico Reales (RBC por sus siglas en inglés) desde sus inicios en la década de los 80's. Para ello el capítulo está dividido en tres partes.

En la primera parte se describe dos aspectos importantes del ciclo económico: por un lado, se enuncia una definición clara del ciclo económico y, por otro lado, se menciona sus principales características conocidas como los hechos estilizados.

En la segunda parte se desarrolla una perspectiva histórica de lo modelos RBC por medio de dos enfoques complementarios. El primer enfoque describe de manera sucinta la evolución de las escuelas económicas desde la Gran Depresión. Esta descripción permite ubicar el contexto histórico en el que la escuela RBC empezó a desarrollar sus principales ideas. El segundo enfoque describe el desarrollo de la escuela RBC por medio de la categorización de las investigaciones de esta escuela. Por ejemplo, se analiza las investigaciones que han tratado de describir el estado del arte de esta escuela en la década de los 80's y 90's. Además, se considera las investigaciones en torno a el mercado de trabajo, política fiscal, dinero, y choque a la inversión.

En la tercera parte se describe los principales supuestos de los modelos RBC como también los pasos a seguir para la construcción, solución y simulación de estos modelos.

1.2. Ciclos económicos

Snowdon y Vane (2005) indican que el objetivo principal de la macroeconomía es analizar y entender los determinantes de las series económicas agregadas, como por ejemplo el producto bruto interno (PBI), el desempleo, la inflación y las transacciones internacionales (tanto en el sector real como financiero). En particular, la macroeconomía estudia los determinantes e impactos de las fluctuaciones de la actividad económica en el corto plazo (ciclos económicos) y los determinantes de la senda de largo plazo de la actividad económica (crecimiento económico).

Bajo este objetivo, diversas escuelas de pensamiento a lo largo de la historia han tratado de brindar explicaciones del comportamiento de las series económicas agregadas. Por ejemplo, la escuela Keynesiana trató de explicar el alto desempleo de inicios de la década de los 30's como consecuencia de una demanda agregada "insuficiente"; de otro lado, la Sintesis Neoclásica sostenía la existencia de una relación inversa entre el desempleo y la inflación (curva de Phillips), la cual podría servir como un marco para analizar políticas económicas; asimismo, los monetaristas hacían énfasis en el mercado de dinero como variable principal en los ciclos económicos. Todas estas escuelas de pensamiento y las posteriores (la Nueva Economía Clásica, la escuela de los Ciclos Económicos Reales, la Nueva Economía Keynesiana y la reciente Nueva Sintesis Neoclásica) han construido sus propios marcos teóricos para brindar explicaciones sobre el comportamiento de las variables económicas.

Ante este conjunto de teorías surge la siguiente pregunta: ¿Qué se debe de tomar en cuenta para evaluar una teoría en macroeconomía? Greenwald y Stiglitz (1988) sugieren que se debe de tomar en cuenta la habilidad de la teoría para explicar las principales características y "hechos estilizados" de la inestabilidad macroeconómica. Esta idea está en línea con lo indicado previamente por Kaldor (1961), quien sugiere que el requerimiento mínimo para cualquier modelo es que este debería ser capaz de explicar las características de los procesos económicos tal como se observan en la realidad. Al aplicar estos requisitos a la teoría de los ciclos económicos, Abel y Bernanke (2001) indican que para que una teoría del ciclo económico sea exitosa, esta debe de explicar el comportamiento cíclico de un **rango amplio** de principales variables económicas. Además, estos autores afirman que existe un consenso razonable sobre los hechos estilizados básicos de los ciclos económicos.

Desde un punto de vista empírico, Snowdon y Vane (2005) sugieren que para explicar los ciclos económicos se debe de identificar las propiedades estadísticas entre los comovimientos del componente cíclico de las variables agregadas y el componente cíclico del PBI.

De todo lo anterior emergen dos preguntas, las cuales son relevantes para estudiar los ciclos económicos: la primera es ¿Qué es el ciclo económico? y la segunda es ¿Qué y cuáles son los hechos estilizados del ciclo económico? La primera pregunta se aborda en la siguiente sección y la segunda en la subsiguiente.

1.2.1. Definición

La definición clásica del ciclo económico fue propuesta por Burns y Mitchell (1946): "el ciclo económico es un tipo de fluctuación de las actividades económicas agregadas de los países que organizan su trabajo principalmente en negocios empresariales". Además, estos autores consideran que el ciclo económico está definido por tres caracteríticas: el primero es que un ciclo económico consiste en una **fase de expansión**, experimentado al mismo tiempo por varias actividades económicas, seguido de una fase de recesión (contracción), y una recuperación posterior, la cual forma parte de la fase de expansión del siguiente ciclo.

La segunda característica es que el ciclo económico es **recurrente**, es decir ocurren repetidamente en las economías; y es **no periodico**, varian en su longitud y no ocurren en intervalos predecibles. La tercera característica es que la duración de un ciclo varía a más de un año a 10 o 20 años.

A estas consideraciones del ciclo, Lucas (1977) aportó en la caracterización del ciclo económico en dos aspectos:

- Con respecto al comportamiento cualitativo de los co-movimientos entre las series, los ciclos económicos son **todos iguales**.
- Esto sugiere la posibilidad de una explicación unificada de los ciclos económicos en un marco de **leyes generales** que gobiernan la economía de mercado.

Finalmente, Long y Plosser (1983) indican que el término "ciclo económico" se refiere al comportamiento temporal conjunto de un amplio rango de variables económicas tales como el precio, el producto, el empleo, el consumo y la inversión. Este comportamiento puede ser descrito por al menos dos regularidades empíricas. La primera se refiere al componente ciclico de cada variable; es decir, las desviaciones de la variable con respecto a su tendencia. La segunda se refiere al movimiento conjunto de varias actividades económicas como por ejemplo el producto en diferentes sectores económicos.

1.2.2. Hechos estilizados

El término "hechos estilizados" es utilizado en diferentes campos de la ciencia económica. Por ejemplo, se utiliza en crecimiento económico, ciclos económico y desarrollo económico (Abad y Khalifa, 2015). Además, este término es atribuido a Kaldor (1957) y esencialmente representa las regularidades empíricas que se han observado en las propiedades estadísticas de las series de tiempo económicas (Snowdon y Vane, 2005).

Caracterización de los hechos estilizados

Usualmente los hechos estilizados de los ciclos económicos se caracterizan o describen por medio de cuatro criterios: variabilidad, dirección, persistencia y temporalidad. Estos criterios están asociados a estadísticos particulares. Así, por ejemplo, la variabilidad está medida por la varianza, la dirección por la correlación (usualmente con el PBI), la persistencia por la autocorrelación; y la temporalidad está medida por las correlaciones dinámicas con respecto al PBI (Snowdon y Vane, 2005).

- Variabilidad (varianza)
  Medido por la varianza o desviación estándar (ds) de la variable. También se considera la desviación estandar normalizada, la cual es la división entre la "ds" de la variable y la "ds" del PBI.

- Dirección (correlación)
  Son los co-movimientos de las variables en relación con el PBI.

corr(x,PBI)> 0	corr(x,PBI)=0	corr(x,PBI)< 0
procíclica	acíclica	contracíclica

- Persistencia (autocorrelación de 1er orden)
  La persistencia indica que si se toma un punto de la variable "X" por encima de la tendencia, la probabilidad de que en el siguiente periodo dicha variable aún permanezca por encima de la tendencia es muy alta.

- Temporalidad (correlaciones dinámicas)
  Contempla si la variable está rezagada, coincide o está adelantada al PBI.

Adelantada	**Rezagada**	**Coincide**
Si la variable se mueve de manera adelantada al PBI	Si la variable se mueve de manera rezagada al PBI	Si la variable se mueve al mismo tiempo que el PBI

Es importante mencionar que para obtener el componente cíclico de las variables macroeconómicas se debe de utilizar un método que permita separar dicho componente del componente tendencial de la variable. En la literatura existen diversos métodos (filtros) que realizan este trabajo con sus ventajas y desventajas. A lo largo del libro se utilizará el filtro de Hodrick y Prescott (filtro HP) debido a su simplicidad y porque usualmente ha sido utilizado por la escuela RBC[1].

Hechos estilizados de Estados Unidos

[A] Ciclo Económico: la Agencia Nacional de Investigación Económica (NBER por sus siglas en inglés) ha determinado un conjunto de fechas que permiten identificar el inicio y fin de un ciclo económico (ver cuadro [1.1]). Este recuento histórico data desde 1854.

Para la determinación de las fechas que definen un ciclo económico, NBER examina un conjunto de indicadores macroeconómicos (PBI, el empleo, el ingreso y variables sectoriales). Es decir, esta institución concibe a la actividad económica desde una visión holística.

Asimismo, NBER considera que una expansión es un periodo entre el punto más bajo de la actividad económica hasta el siguiente punto más alto. De manera similar, una contracción (recesión) empieza desde el punto más alto de la actividad económica y termina en el punto mínimo. Se debe de agregar que para NBER una recesión no está definida

[1]Además del fitro HP, existen otros enfoques desarrollados por Baxter y King (1999), Woitek (1998) y Christiano y Fitzgerald (1999). Para un mejor detalle del filtro HP, y Baxter y King se puede revisar DeJong y Dave (2007), Capítulo 3.

como la reducción del PBI real en dos trimestres consecutivos; sino que, dicha institución concibe que una recesión es la reducción significativa de la actividad económica en la gran mayoría de los sectores económicos, la cual podría durar varios meses. Esta contracción se debería de observar en el PBI real, ingreso real, empleo, producción industrial y ventas a nivel mayorista y minorista[2].

En el cuadro [1.1] se muestra los 33 ciclos que NBER ha identificado. Cada uno de ellos está asociado a su fecha de inicio y de fin para los dos enfoques de medir la longitud del ciclo económico. El primero de estos enfoques cuenta el número de meses que existe entre dos puntos máximos de la actividad económica; por otro lado, el segundo enfoque cuenta el número de meses que existe entre dos puntos mínimos de la actividad económica.

Tres conclusiones se pueden obtener del cuadro [1.1]. La primera es que entre 1854-2009 la economía norteamericana ha experimentado 33 ciclos. Al dividir la muestra en tres segmentos, dos antes de la segunda guerra mundial y uno después, se tiene lo siguiente: Estados Unidos entre 1854-1919 ha experimentado 16 ciclos; entre 1919-1945, es decir entre la primera y segunda guerra mundial, se encuentra 6 ciclos; y entre 1945-2009 (post segunda guerra mundial) 11 ciclos.

La segunda conclusión es que el tiempo promedio que dura un ciclo, en toda la muestra, es apróximadamente cinco años. Sin embargo, los ciclos antes de la segunda guerra mundial duraban alrededor de 4 años, mientras que después su duración se elevo a 6 años.

Finalmente, la tercera conclusión es que el tiempo promedio de expansión es apróximadamente de tres años y de contracción es un año y medio para los 33 ciclos. Sin embargo, estos números cambian cuando consideramos la segunda guerra mundial como el punto de quiebre en la muestra. Antes de la segunda guerra mundial la expansión duraba 2. 4 años mientras que después de la guerra la expansión se duplicaba llegando a cinco años apróximadamente. De igual manera con el tiempo de la contracción, antes de la segunda guerra mundial el tiempo de recesión duraba cerca a dos años, mientras que después de este evento la recesión llegó a bordar apróximadamente un año.

La figura [1.1] ilustra los dos últimos ciclos económicos de la economía norteamericana desde 1988 según la determinación de NBER. Se puede observar que ambos enfoques de medición de los ciclos económicos antes descritos consideran apróximadamente el mismo número de meses que dura un ciclo económico. Asimismo, desde mediados del 2007 hasta el 2016 no se ha completado un ciclo.

[B] Hechos estilizados relacionados al crecimiento económico: en la literatura de crecimiento económico existe un conjunto amplio de hechos estilizados. Estas regularidades empíricas usualmente engloban comportamientos de la contabilidad de crecimiento, del capital físico, de la proporción de los factores en la renta nacional, del capital humano, entre otras variables relevantes (Jones, 2016). Entre ellos existen los hechos estilizados "clásicos" propuestos por Kaldor (1961, 1963), quien a su juicio sugirio seis hechos estilizados acerca

[2]Para un mayor detalle ver http://www.nber.org/cycles/cyclesmain.html. En particular ver http://www.nber.org/cycles/sept2010.html

Cuadro 1.1: Fechas de los ciclos económicos en Estados Unidos (1854-2009)

Mes Año				Duración (meses)		
Punto máximo (PM)		Punto mínimo (pm)		PM a PM	pm a pm	Ciclo
		Diciembre	1854			
Junio	1857	Diciembre	1858		48	Ciclo 1
Octubre	1860	Junio	1861	40	30	Ciclo 2
Abril	1865	Diciembre	1867	54	78	Ciclo 3
Junio	1869	Diciembre	1870	50	36	Ciclo 4
Octubre	1873	Marzo	1879	52	99	Ciclo 5
Marzo	1882	Mayo	1885	101	74	Ciclo 6
Marzo	1887	Abril	1888	60	35	Ciclo 7
Julio	1890	Mayo	1891	40	37	Ciclo 8
Enero	1893	Junio	1894	30	37	Ciclo 9
Diciembre	1895	Junio	1897	35	36	Ciclo 10
Junio	1899	Diciembre	1900	42	42	Ciclo 11
Septiembre	1902	Agosto	1904	39	44	Ciclo 12
Mayo	1907	Junio	1908	56	46	Ciclo 13
Enero	1910	Enero	1912	32	43	Ciclo 14
Enero	1913	Diciembre	1914	36	35	Ciclo 15
Agosto	1918	Marzo	1919	67	51	Ciclo 16
Enero	1920	Julio	1921	17	28	Ciclo 17
Mayo	1923	Julio	1924	40	36	Ciclo 18
Octubre	1926	Noviembre	1927	41	40	Ciclo 19
Agosto	1929	Marzo	1933	34	64	Ciclo 20
Mayo	1937	Junio	1938	93	63	Ciclo 21
Febrero	1945	Octubre	1945	93	88	Ciclo 22
Noviembre	1948	Octubre	1949	45	48	Ciclo 23
Julio	1953	Mayo	1954	56	55	Ciclo 24
Agosto	1957	Abril	1958	49	47	Ciclo 25
Abril	1960	Febrero	1961	32	34	Ciclo 26
Diciembre	1969	Noviembre	1970	116	117	Ciclo 27
Noviembre	1973	Marzo	1975	47	52	Ciclo 28
Enero	1980	Julio	1980	74	64	Ciclo 29
Julio	1981	Noviembre	1982	18	28	Ciclo 30
Julio	1990	Marzo	1991	108	100	Ciclo 31
Marzo	2001	Noviembre	2001	128	128	Ciclo 32
Diciembre	2007	Junio	2009	81	91	Ciclo 33

Fuente: NBER (National Bureau Economics Research)

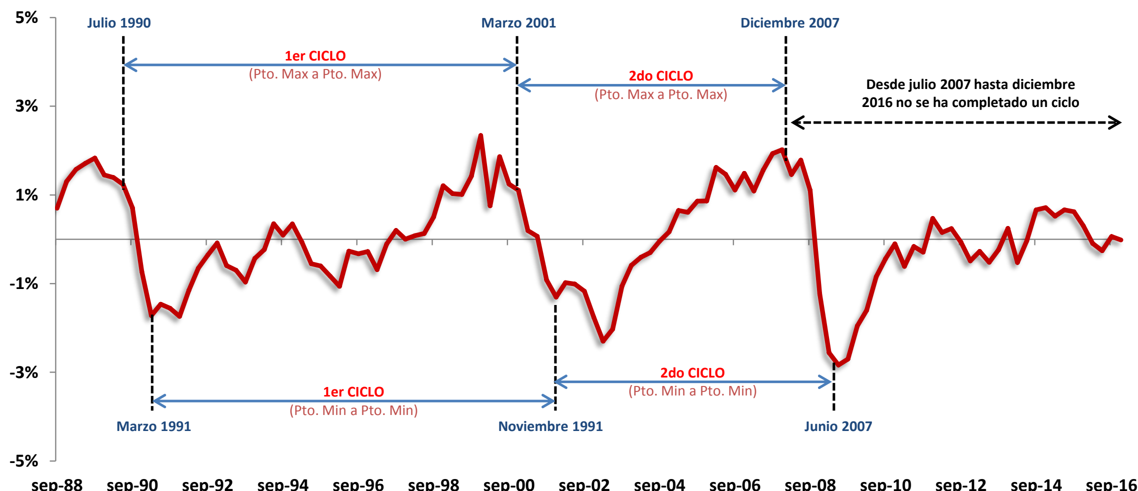


Figura 1.1. Componente cíclico del PBI percápita (1988.3-2016.4)
Esta serie se ha obtenido al aplicar el filtro HP al PBI percapita con un parámetro de suavizamiento $\lambda = 1600$.
Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis, "Table 1.1.6. Real Gross Domestic Product, Chained Dollars" (PBI en billones de US$ del 2009). Además, la población se ha obtenido de "Table 7.1. Selected Per Capita Product and Income Series in Current and Chained Dollars".

del crecimiento económico[3]:

HE-1: La producción percápita crece en el tiempo y su tasa de crecimiento no es decreciente.

HE-2: El capital físico percápita crece en el tiempo.

HE-3: La tasa de retorno del capital es relativamente constante.

HE-4: El ratio capital-producto es relativamente constante: $K_t/Y_t = contante$.

HE-5: La participación del trabajo y del capital físico en la producción nacional son relativamente constantes: $\frac{r_t K_t}{Y_t} = constante$ y $\frac{w_t L_t}{Y_t} = constante$

HE-6: La tasa de crecimiento del producto percápita es diferente entre los países.

HE-1: el primer hecho estilizado de Kaldor se refiere a la tasa de crecimiento percápita del PBI. Al observar los datos entre 1930 y 2015 se infiere que la tasa de crecimiento promedio del PBI real percápita es 2.2 %. De la muestra de análisis se observa que, entre los inicios de la década de los 30's hasta mediados de la década de los 40's, el crecimiento del PBI real percápita ha sido muy volátil llegando a mostrar valores desde -13 % hasta 17 % apróximadamente. Esto se debe a que dicho periodo estuvo caracterizado por los efectos de la crisis económica de 1929 y de la segunda guerra mundial. Después de este último evento, los datos del crecimiento del PBI percápita han mostrado una mayor estabilidad; tal es así, que entre 1947 y 2015, la tasa de crecimiento promedio del PBI real percápita es

[3]Estos hechos estilizados usualmente son mencionados en los libros de crecimiento económico. Un ejemplo de ello es el libro de Barro y Sala-i-Martin (2009).

apróximadamente 1.9 % (ver figura [1.2]). Inclusive la desviación estándar de esta variable, en este periodo, es de 2.4 %; mucho menor en comparación con el periodo 1930-1946 (des. est. = 10 %). De todo lo anterior se podría concluir que los datos entre 1947 y 2015 confirman el hecho estilizado de Kaldor.

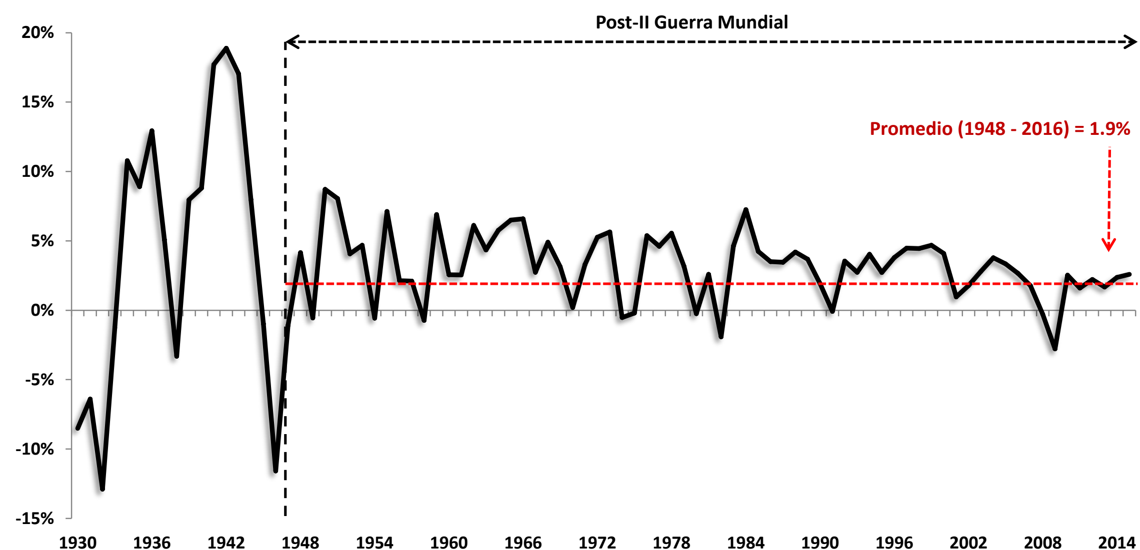


Figura 1.2. HE-1| Tasa de crecimiento anual del PBI real percápita (1930-2015)
El PBI real está expresado en dos maneras: la primera es en billones de US$ del 2009; la segunda en índice de cantidad (2009=100). En niveles ambos enfoques son distintos; sin embargo, cuando se convierte a tasa de crecimiento anual ambos enfoques brindan el mismo número. Para construir el PBI percápita se ha considerado el PBI real (en billones de US$ del 2009) y la población (en miles).
Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis, "Table 1.1.6. Real Gross Domestic Product, Chained Dollars" (PBI en billones de US$ del 2009). Además, la población se ha obtenido de "Table 7.1. Selected Per Capita Product and Income Series in Current and Chained Dollars".

HE-2: el segundo hecho estilizado de Kaldor hace referencia a la tasa de crecimiento percápita del capital físico. Para analizar está variable es necesario definir el stock de capital. En este apartado se sigue a Burnside y Eichenbaum (1996), quienes definen al stock de capital desde una óptica amplia (componentes del activo fijo más bienes durables). Bajo la premisa anterior, la figura [1.3] muestra la evolución del crecimiento del capital percápita entre 1930 y 2015. De esta figura se desprende una idea principal: al igual que la tasa de crecimiento del PBI percápita, el crecimiento del capital percápita es estable despúes de la segunda guerra mundial con un valor promedio de 1.8 %. Esto confirma el segundo hecho estilizado de Kaldor.

HE-3: el tercer hecho estilizado de Kaldor indica que la tasa de retorno del capital es relativamente constante. En este contexto, la agencia de estadísticas laborales (BLS por sus siglas en inglés) estima el precio de renta del capital, el cual representa el costo de alquiler del capital (tal como se conoce en los modelo macroeconómicos de equilibrio general). Los datos estimados de esta variable se encuentran disponibles desde 1987 hasta el 2014 con

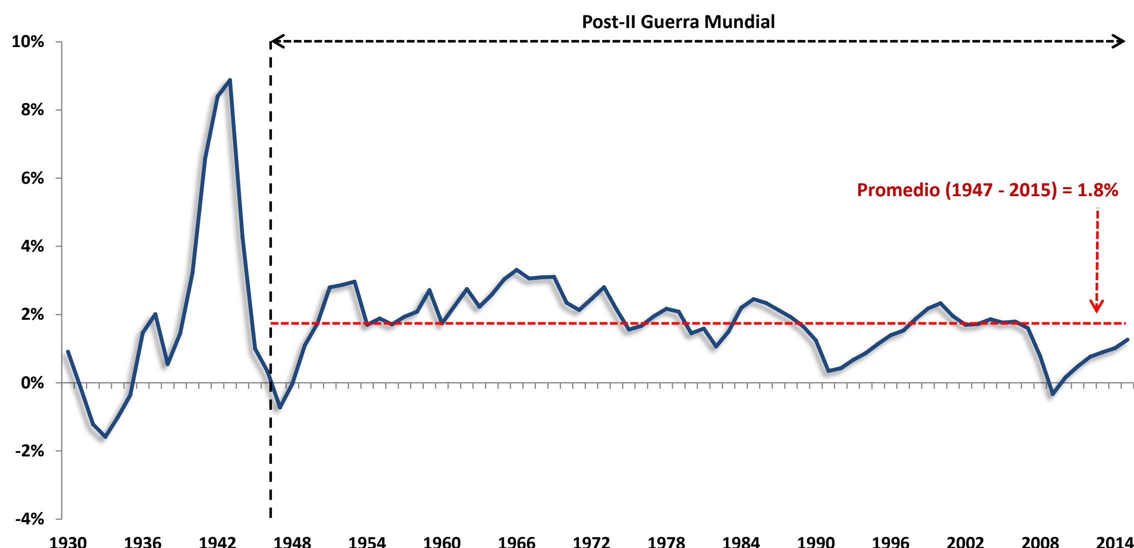


Figura 1.3. HE-2| Tasa de crecimiento anual del stock del capital real percápita (1930-2015)
El stock de capital está expresado bajo la concepción de Burnside y Eichenbaum (1996). La población está expresada en miles y considera a toda la economía.
Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis,"Table 1.2. Chain-Type Quantity Indexes for Net Stock of Fixed Assets and Consumer Durable Goods" (Stock de Capital). Además, la población se ha obtenido de "Table 7.1. Selected Per Capita Product and Income Series in Current and Chained Dollars".

frecuencia anual. Además, esta variable está estimada para diversos niveles de la industria manufacturera y no manufacturera; sin embargo, dicha estimación no está disponible para la economía norteamericana como un todo.

Al observar los datos para cuatro sectores industriales (maderero, maquinarias, equipo de transporte y equipos electrónicos) se infiere que la tasa de interés de alquiler del capital oscila, en promedio, entre 12 % y 14 % durante 1987-2014 (ver figura [1.4]). Si se considera el promedio de los 18 sectores industriales entre 1987 y 2014, la tasa de interés de alquiler del capital es 13 % aproximadamente. Lo observado por Kaldor es que esta tasa de interés es constante a través del tiempo, lo cual implicaría que en un muestra más larga de observaciones la tasa de interés muestre un comportamiento de reversión a la media.

HE-4: para evaluar si el cuarto hecho estilizado de Kaldor se mantiene hasta la actualidad se tiene que construir el ratio capital/producto. Para ello, en primer lugar, se debe definir qué se considera como stock de capital físico real; en segundo lugar, se debe obtener el PBI en términos reales; finalmente, se procede a dividir ambos agregados económicos. Es preciso mencionar que este ratio se construye con variables anuales expresadas en términos reales.

Stock de capital: existen diversas formar de concebir el stock de capital (Jones, 2016). En este apartado se considera tres enfoques. El primero considera que el stock de capital es solo el activo fijo privado no residencial, el cual contiene equipos, estructuras y propiedad

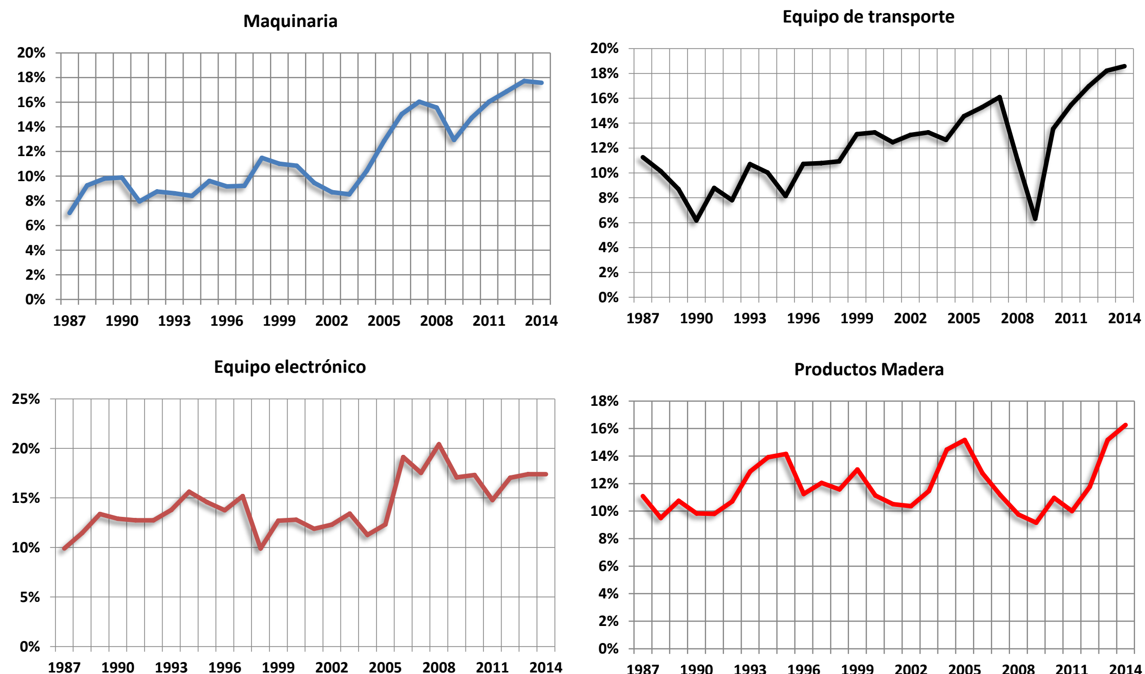


Figura 1.4. HE-3| Tasa de retorno del capital por nivel de sector industrial (1987-2014)

Fuente: Bureau of Labor Statistics (BLS), www.bls.gov/mfp.

intelectual. El segundo enfoque considera que el stock de capital engloba no solo el activo fijo privado no residencial sino también el activo fijo no residencial del gobierno. El tercer enfoque está basado en Burnside y Eichenbaum (1996), quienes consideran que el stock de capital es la suma de cuatro componentes, tres relacionados a los activos fijos y uno al consumo de bienes durables: [1] activo fijo en equipo y estructura privada, [2] activo fijo residencial privado, [3] activo fijo residencial y no residencial público, y [4] bienes durables de consumo. Conviene subrayar que todos estos conceptos se encuentran en términos reales (índice de cantidad) y se pueden encontrar en *U.S. Bureau of Economic Analysis, "Table 1.2. Chain-Type Quantity Indexes for Net Stock of Fixed Assets and Consumer Durable Goods"*.

Con las definiciones previas del stock del capital y el PBI real se construye el ratio capital/producto, el cual se muestra en la figura [1.5]. Dos ideas importantes se desprenden de este gráfico: la primera es que el ratio capital/producto ha sido relativamente constante desde la segunda guerra mundial (1947-2015), lo cual está acorde con lo sugerido por Kaldor; asi por ejemplo, se tiene que el ratio considerando que el stock de capital es solo el activo fijo privado no residencial es cercano a uno; bajo el segundo enfoque del capital, este ratio es 2.2 y bajo la concepción de Burnside y Eichenbaum (1996), el stock de capital es seis veces el PBI real. La segunda idea es que entre los tres enfoques del capital, el primero permite obtener un ratio capital/producto mucho más estable en comparación con los dos restantes. Ello se comprueba al comparar las deviaciones estándar muestrales entre 1947-2015:

$$\sigma_{\text{Enfoque-1}}(=4\,\%) < \sigma_{\text{Enfoque-2}}(=21\,\%) < \sigma_{\text{Enfoque-3}}(=32\,\%)$$

Sin embargo, una mejor interpretación del grado de variabilidad que la sugeridad por la desviación estándar es el coefiente de variación (CV = desviación estándar/media), la cual expresa la desviación estándar como porcentaje de la media. Para la correcta aplicación de este estadístico, se exige que todos los valores de la serie sean positivos, lo cual se cumple para este caso. El coeficiente de variación se muestra a continuación:

$$CV_{\text{Enfoque-1}}(=4\,\%) < CV_{\text{Enfoque-3}}(=5\,\%) < CV_{\text{Enfoque-2}}(=10\,\%)$$

Este estadístico sugiere que el primer y el tercer enfoque son muy similares en cuanto a variabilidad; sin embargo, ambos claramente se encuentran muy alejados de la variabilidad del segundo enfoque.

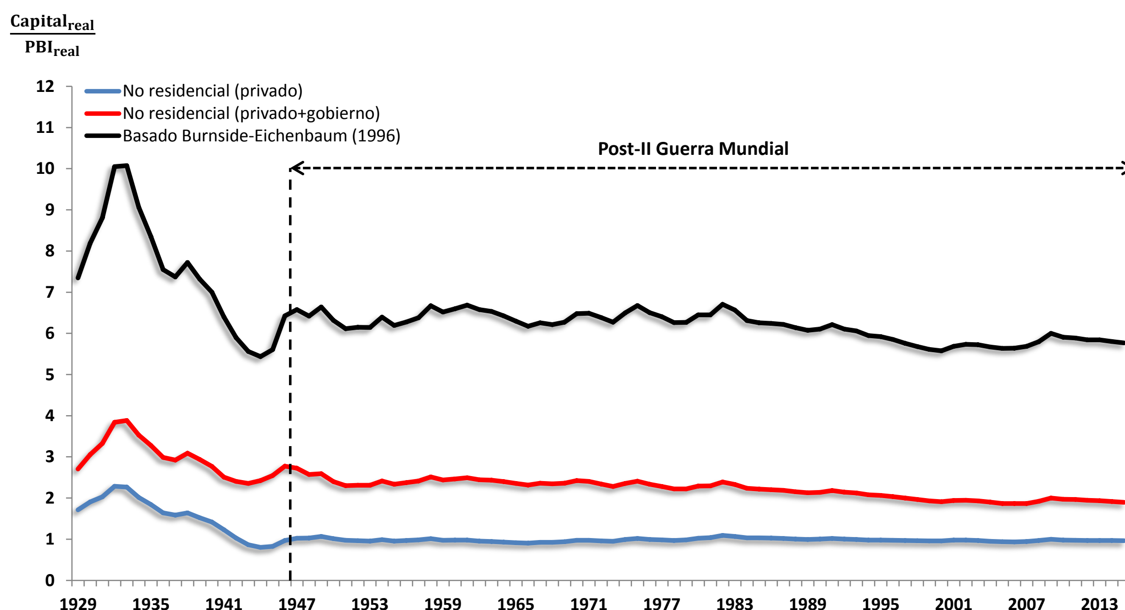


Figura 1.5. HE-4| Ratio Stock de Capital (real)/PBI (real)
El PBI y el stock del capital están expresados en términos reales (índice de cantidad, 2009=100).
Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis, "Table 1.2. Chain-Type Quantity Indexes for Net Stock of Fixed Assets and Consumer Durable Goods" (Stock de Capital) y "Table 1.1.3. Real Gross Domestic Product, Quantity Indexes" (PBI)

HE-5: este hecho estilizado se refiere a la participación del trabajo y del capital en el ingreso nacional. La figura [1.6] muestra que la participación de ambos factores en el ingreso nacional han sido relativamente estables. Por ejemplo, para el caso del capital, dicha participación promedio entre 1948 y 2014 es 33.7 %; de igual manera para el trabajo, la cual es igual a 66.3 %. Estos valores son importantes, pues como se verá en el transcurso del libro, la función de producción Cobb-Douglas sugiere que la participación del capital es constante e igual al exponente del capital en la función de producción. Bajo el proceso

de calibración estándar en los modelos RBC, se puede considerar que dicho exponente es igual a 33.7 %, lo cual es observado en los datos.

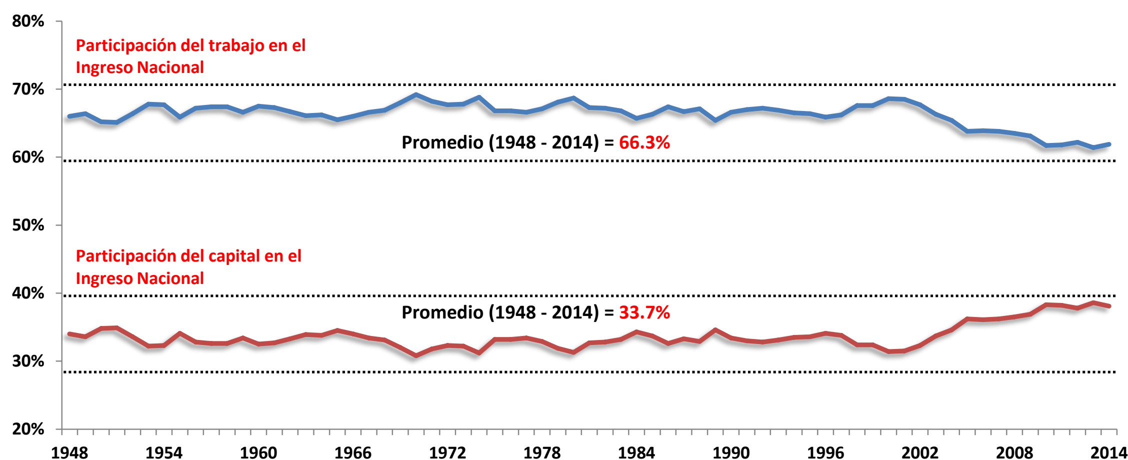


Figura 1.6. HE-5| Participación de los factores en el Ingreso Nacional (1948-2014)
El PBI y el stock del capital están expresados en términos reales (índice de cantidad, 2009=100).
Fuente: Bureau of Labor Statistics, Multifactor Productivity Trends, "Private Business Sector" (www.bls.gov/mfp/mprdload.htm, Historical Series).

Además de los hechos estilizados de Kaldor, en la literatura existe un conjunto de relaciones de largo plazo entre el PBI, consumo e inversión (Stock y Watson, 1999), llamadas "**relaciones de crecimiento balanceado**". Estas relaciones son importantes debido a que sirve de insumo en el proceso de calibración de los modelos RBC, especialmente en las relaciones de estado estacionario.

La figura [1.7] muestra los ratios consumo-PBI, inversión-PBI y compras del gobierno-PBI. Se puede observar que el valor promedio de cada ratio entre 1947-2016 es 63 %, 14 % y 26 % respectivamente. Una característica importante de la evolución de estos ratios es que la participación del gobierno ha disminuido lentamente en el tiempo. Por otro lado, el consumo y la inversión han ganado participación en el PBI. Sin embargo, dichos ratios presentan cierta estabilidad en el tiempo.

[C] Hechos estilizados relacionados al ciclo económico: una de las principales referencias con respecto a los hechos estilizados de los ciclos económicos es la investigación de Stock y Watson[4] en 1999 bajo el título "*Business Cycle Fluctuations in US Macroeconomic Time Series*". En este articulo, los autores examinan las propiedades ciclicas de

[4]Otra importante referencia es el trabajo de Kydland y Prescott (1990). Estos autores mostraron las regularidades cíclicas de un conjunto de variables reales y nominales. La muestra de analisis corresponde a lo datos despúes de la guerra entre Estados Unidos y Corea (1950-1953); es decir, desde 1954 hasta 1989. Una diferencia principal con respecto a la investigación de Stock y Watson (1999) es que Kydland y Prescott utilizaron el filtro Hodrick y Prescott para obtener el componente cíclico de las variables. Otra investigación con énfasis en los hechos estilizados en el componente cíclico de las variables relacionadas al

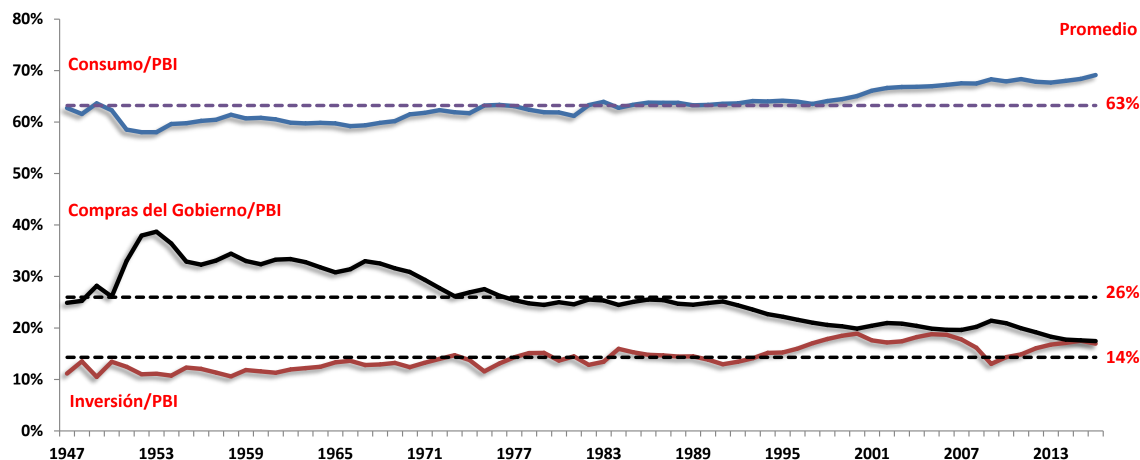


Figura 1.7. Relaciones de largo plazo entre el PBI, consumo, inversión y compras del gobierno
Fuente: Bureau of Economic Analysis, "Table 1.1.6. Real Gross Domestic Product, Chained Dollars".

71 variables económicas con frecuencia trimestral, las cuales se encuentran agrupadas en ocho categorias: empleo sectorial, cuentas nacionales, empleo agregado, productividad y utilización de la capacidad, precios y salarios, precios de activos, agregados monetarios, indicadores líderes, y producto internacional.

El periodo muestral de análisis que estos autores utilizan corresponde a los datos despúes de la segunda guerra mundial (1947-1995). Esto se debe a dos principales razones: la primera es que la economía de Estados Unidos es muy distinta antes de la segunda guerra mundial en términos de tecnología, instituciones, producción de bienes y servicios, entre otras características. La segunda es por la calidad de datos antes de la segunda guerra mundial, lo cual podría generar problemas de comparabilidad de las variables a lo largo de toda la muestra. Es más, los autores utilizan este periodo para mostrar gráficamente la evolución de las variables, pero en el cálculo de los estadísticos (desviación estándar, correlación (dinámica) y autocorrelación) se concentran en el periodo despúes de la guerra entre Estados Unidos y Corea; es decir, consideran los datos entre 1954 y 1995.

Otro aspecto importante es que Stock y Watson utilizaron el filtro de Baxter y King (1994) (*band pass filter*) para obtener el componente cíclico de las 71 variables. Stock y Watson (1999) sugieren que un filtro ideal preserva el componente cíclico y elimina las otras fluctuaciones (altas frecuencias y bajas frecuencias); sin embargo, tal como señala Dejong y Dave (2007 Cap. 3), el filtro ideal no es posible de implementar debido a que requiere un número infinito de observaciones de la serie previo a la aplicación del filtro. En el caso del filtro de Baxter y King, el cual es una apróximación al filtro ideal, el componente cíclico tiene una peridiocidad entre seis trimestres y ocho años. La ventaja de este filtro es que elimina en gran parte las fluctuaciones de alta frecuencia (menores a seis trimestres) y de baja frecuencia (mayores a ocho años). En constraste con este filtro, el propuesto por Hodrick y Prescott (1981) no impide que las fluctuaciones de alta frecuencia sean parte

mercado laboral es el de Kydland (1995).

del componente cíclico.

Es preciso mencionar que a lo largo de todo este libro el filtro utilizado es el de Hodrick y Prescott. Esto se debe a que las investigaciones en la escuela RBC principalmente utilizaron este filtro. Además, a pesar de sus debilidades, este filtro se sigue utilizando en la literatura por su simplicidad.

En esta sección se mostrará los hechos estilizados de ocho variables reales: PBI, consumo, inversión, stock de capital, horas totales, empleo, salario real y productividad (laboral). Estas variables se encuentran en logarítmo y en frecuencia trimestral (y no están en términos percápita).

[C.1] Construcción de las series macroeconómicas: antes de obtener el componente cíclico de cada variable y de calcular los estadísticos es necesario definir cada una de las variables e identificar las fuentes de información. En los siguientes párrafos se detalla cómo se construye cada variable (cuando ello amerita) y la fuente, que usualmente es la Agencia de Análisis Económico (BEA por sus siglas en inglés).

Producto Bruto Interno (PBI) y Consumo: el PBI está en términos reales (billones de US$ del 2009). De otro lado, el consumo es calculado como la suma (en términos reales) del consumo del bienes no durables y el consumo de servicios:

$$\text{Consumo real} = \frac{C_{bnd}}{IP_{ND}} + \frac{C_{servicios}}{IP_S} \tag{1.1}$$

Donde: C_{bnd} es el gasto personal de consumo en bienes no durables, $C_{servicios}$ es el gasto personal de consumo en servicios. Además, estos componentes del gasto se encuentran en términos nominales, para transformarlos a términos reales es necessario deflactarlos por el índice de precios respectivo. Así, en el caso del consumo de bienes no durables se deflacta por el índice de precios de bienes no durables (IP_{ND}); de manera similar para los servicios, cuyo índice de precios es IP_S. Cabe mencionar que cada índice de precio de debe de dividir entre 100.

Inversión: es calculado como la suma de la inversión privada real y el consumo de bienes duraderos (en términos reales):

$$\text{Inversión real} = Inv_{pr} + \frac{C_{bd}}{IP_{bd}} \tag{1.2}$$

Donde: Inv_{pr} es la inversión privada doméstica bruta (en términos reales); C_{bd} es el consumo de bienes durables (en términos nominales), el cual es deflactado por el índice de precios de bienes durables (IP_{bd}). Al igual que el consumo, el índice de precio se divide por 100.

La figura [1.8] muestra la evolución del PBI, consumo e inversión, todos en términos reales y en logarítmo natural. De la evolución de estas tres variables se observa que la inversión es más volatil que el PBI y el consumo. Es preciso mencionar que la muestra considerada para los gráficos y estadísticos comprende entre el primer trimestre de 1954

hasta el cuarto trimestre del 2015. Es decir, no se considera el periodo de guerra entre Estados Unidos y Corea tal como lo hizo Stock y Watson (1999).

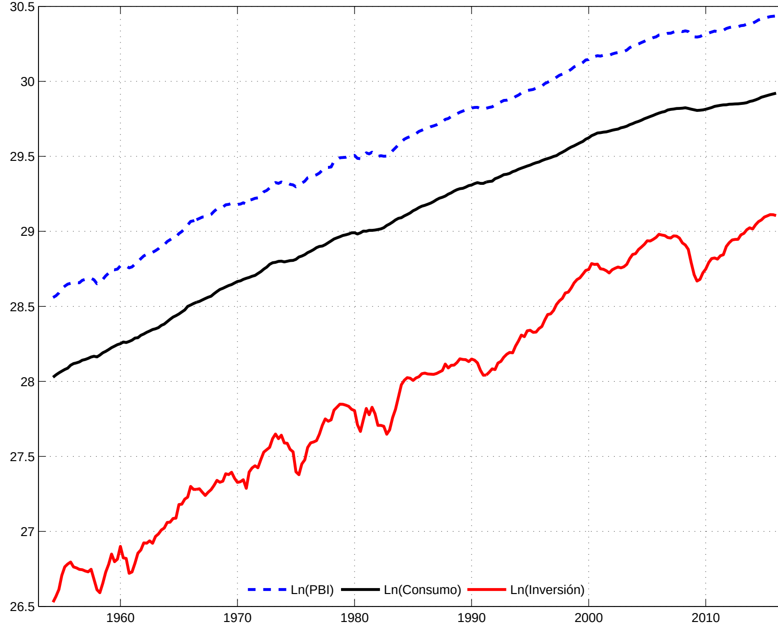


Figura 1.8. PBI, consumo e inversión (1954.1 - 2015.4)
Las variables están expresadas en logarítmo natural con frecuencia trimestral. El consumo considera bines no duraderos y servicios. La inversión engloba la inversión privada y consumo de bienes duraderos.
Fuente: Bureau of Economic Analysis, "Table 1.1.6. Real Gross Domestic Product, Chained Dollars" (PBI-inversión privada); "Table 2.3.5. Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product" (componentes del consumo); "Table 2.3.4. Price Indexes for Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product" (índice de precios por componente del consumo).

Stock de capital: como se mencionó líneas previas, en esta sección se considera el concepto de stock de capital de Burnside y Eichenbaum (1996). Los datos disponibles del stock de capital se encuentran con frecuencia anual; sin embargo, es necesario "extrapolar" dichos datos a una frecuencia trimestral para poder calcular los estadísticos del componente cíclico. Por ejemplo para calcular la correlación dinámica con el PBI o la inversión, dado que dichas variables están en frecuencia trimestral, se requiere que el capital esté en la misma frecuencia. En este contexto, Levy y Chen (1994) sugieren cuatro métodos de construir una serie del stock de capital (neto) real trimestral: el primer método es una interpolación lineal de la serie anual. La idea es consruir los valores trimestrales a lo largo de un segmento que conecta dos observaciones consecutivas anuales. Formalmente:

$$K_{i,j} = K_{i-1} + k_j \qquad i = 1948, 1849, ...2015 \text{ (años)} \qquad j = 1, 2, 3, 4 \text{ (trimestres)} \qquad (1.3)$$

En la ecuación (1.3), $K_{i,j}$ representa el stock del capital del trimestre "j" del año "i". Por ejemplo, $K_{1948,1}$ es el stock de capital del primer trimestre de 1948. Además, K_{i-1} es

el stock de capital del año anterior, en este ejemplo representaría el stock de capital de 1947. De otro lado, k_j es el factor de stock de capital adicional por trimestre, el cual es calculado de la siguiente manera:

$$k_j = \frac{K_i - K_{i-1}}{4} \cdot j \tag{1.4}$$

Debido a que es una interpolación lineal, la razón aritmetica es simplemente la diferencia de dos stock de capital anuales consecutivos entre el número de trimestres (puntos). Bajo este supuesto, el cálculo del stock de capital del primer trimestre será igual al stock de capital inicial (del año previo) más dicha razón aritmetica; para el segundo trimestre será stock de capital inicial (del año previo) más dos veces la razón aritmetica; y así sucesivamente hasta llegar al stock de capital final (anual). Esta lógica de cálculo se refleja en la ecuación (1.4). Conviene subrayar que esté método es utilizado en este capítulo para "construir" la serie de stock de capital neto trimestral (ver figura [1.9]).

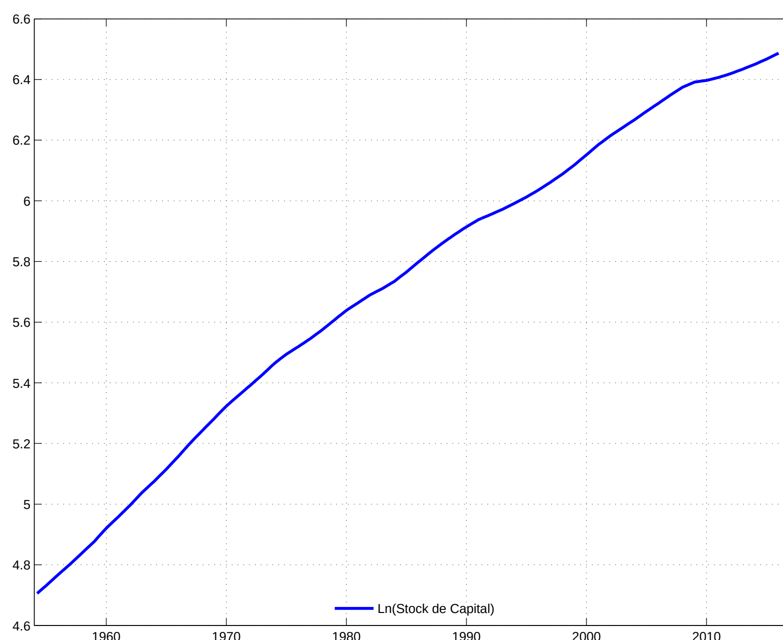


Figura 1.9. Stock de capital (neto) real trimestral (1954.1 - 2015.4)
La serie trimestral ha sido obtenida por el método de interpolación lineal, coniderando el punto inicial el stock de capital de 1947.
Fuente: Bureau of Economic Analysis, "Table 1.2. Chain-Type Quantity Indexes for Net Stock of Fixed Assets and Consumer Durable Goods".

El segundo método utiliza la relación entre el stock de capital, la depreciación y la inversión (real), reflejada en la ecuación del movimiento del capital para estimar la tasa de depreciación (se supone constante a lo largo del año, pero distinta intertemporalmente). Luego en función a esta tasa de depreciación y a la inversión trimestral (que está disponible) se estima el stock de capital trimestral. Este ejercicio se realiza para cada año. El método sigue los siguientes pasos: en primer lugar se esribe la ley de movimiento del capital para

cada trimestre de un año específico (ecuaciones (1.5) al (1.8)).

$$K_{i,1} = (1-\delta_i)K_{i-1} + I_{i,1} \tag{1.5}$$
$$K_{i,2} = (1-\delta_i)K_{i,1} + I_{i,2} \tag{1.6}$$
$$K_{i,3} = (1-\delta_i)K_{i,2} + I_{i,3} \tag{1.7}$$
$$K_{i,4} = (1-\delta_i)K_{i,3} + I_{i,4} \tag{1.8}$$

Donde $K_{i,4}$ es el stock de capital del siguiente año (K_i) y K_{i-1} es el stock del capital del año previo. Luego de definir las ecuaciones trimestrales, el segundo paso es reemplazar recursivamente la ecuación (1.5) en (1.6), esta última en (1.7) y finalmente esta última en (1.8). Esta sustitución recursiva permite obtener una ecuación de cuarto grado donde la variable es la tasa de depreciación, la cual puede ser resuelta por algún método de ecuaciones no-lineales como el "Método de Newton". Finalmente, al conocerse la tasa de depreciación, simplemente se reemplaza en las ecuaciones (1.5) al (1.8) y se obtiene el stock de capital trimestral. Este procedimiento se debe de realizar para cada año y así obtener la serie temporal trimestral del stock de capital.

El tercer método sugiere que, en lugar de estimar la tasa de depreciación, se debe estimar directamente el monto de depreciación trimestral por medio de una interpolación lineal de la serie de depreciación anual. Dado este cálculo se procede a calcular el stock de capital trimestral bajo la "ecuación del movimiento del capital" (dado que la inversión real trimestral es conocida). Por último, el cuarto método supone que la depreciación trimestral es simplemente la depreciación anual dividido entre cuatro. Con ello, de manera similar que en el tercer método, calcula el stock de capital trimestral.

Horas totales y Empleo: las horas totales trabajadas y el empleo (puestos de trabajo) son obtenido de la base de datos de Valerie Ramey, quien ha compilado los datos de empleo trimestral en base a la información proporcionada por la Agencia de Estadísticas Laborales (BLS por sus siglas en inglés). Ramey tiene dos principales agregados de la serie de horas trabajadas: total de la economía y el sector de negocios que no incluye al cultivo (*Nonfarm Business (all persons)*). Para el cálculo de los estadísticos se tomará en cuenta este último concepto de "horas trabajadas". Además, esta variable se encuentra en frecuencia trimestral pero en nivel-anualizado; es decir, considera el total de horas trabajadas en un año; la forma de cálculo es la siguiente:

$$\text{Horas}_t = UE_t * UH_t * [52 \text{ semanas/año}]/1000 \tag{1.9}$$

Donde: Horas_t es el número de horas "anuales" del trimestre "t". Para su cálculo se multiplica el promedio de puestos de trabajo (empleos) durante el trimestre (UE_t) por el promedio de horas trabajadas semanalmente durante el trimestre (UH_t). A este número se le multiplica el número de semanas que hay en un año (52). Con respecto al empleo, de manera similar al total de horas trabajadas, se considera el sector de negocios que no incluye al cultivo (*Nonfarm Business (all persons)*).

Salario real y Productividad (laboral): el salario real, al igual que el número de horas trabajadas y el empleo, es calculada para el sector de negocios que no incluye al cultivo.

Además, representa la compensación real por hora como índice 2009 = 100. De otro lado, la productividad (laboral) es calculada como el ratio entre el PBI real y el número total de horas. En la figura [1.10] se muestra la evolución del logaritmo natural de las variables asociadas al mercado de trabajo.

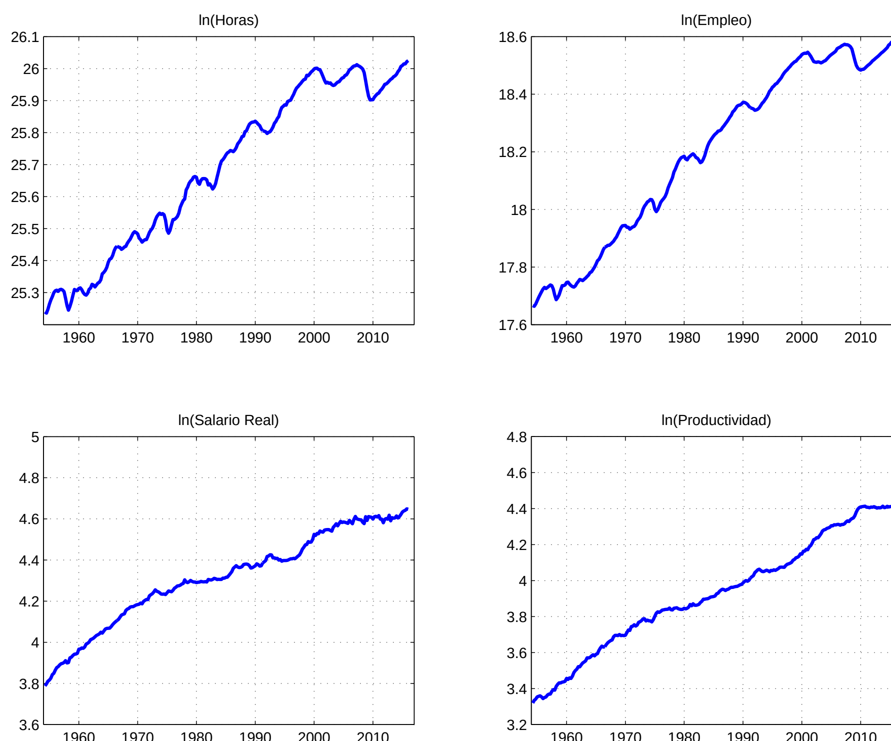


Figura 1.10. Series macroeconómicas (1954.1 - 2015.4)
El numero total de horas (billones de horas trabajadas) y el empleo (millones de puestos de trabajo) corresponden al sector *Nonfarm business (all persons)*. El salario real (índice 2009=100) es la compensación real por hora. La productividad (laboral) es el ratio entre el PBI real y el total de horas trabajadas (productividad = PBI/H). Todas las variables están en logarítmo.
Fuente: El total de horas y de empleo se ha obtenido de los datos de Valerie Ramey (http://econweb.ucsd.edu/∼vramey/). El salario real se obtiene de *Federal Reserve Bank of St. Louis*, "Nonfarm Business Sector: Real Compensation Per Hour, Index 2009 = 100, Quarterly, Seasonally Adjusted"

[C.2] Separación del componente ciclico de las variables: para extraer el componente cíclico de las ocho variables macroeconómicas se utiliza el filtro de Hodrick y Prescott (1982). Las figura [1.11] muestra el componente tendencial del PBI real. Su componente cíclico es la diferencia entre el valor de la variable en niveles (PBI real) y el componente tendencial (obtenido por el filtro HP).

Las figuras [1.12] y [1.13] muestran el componente cíclico de las ocho variables, y las compara con el componente cíclico del PBI. La idea de esta primera comparación es ganar un primer entendimiento sobre la volatilidad de las variables y sus comovimientos con el

PBI. Algunas obervaciones emergen de este análisis gráfico:

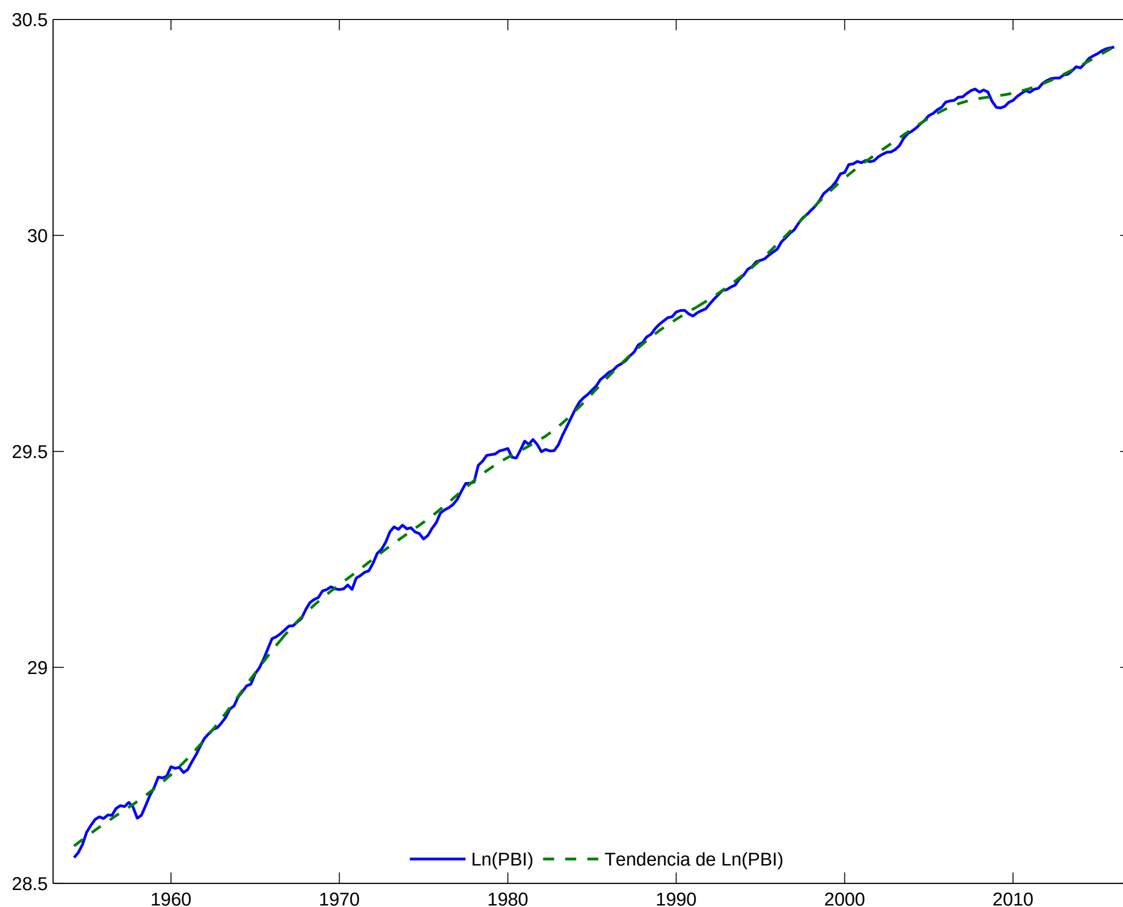


Figura 1.11. PBI real de Estados Unidos y componente tendencial (1954.1-2015.4)
El componente tendencial se ha obtenido al aplicar el fitro HP a las variables en logarítmo (per-cápita) con el parámetro de suavizamiento $\lambda = 1600$.

[Obs1] El componente cíclico del PBI parece ser menor volátil durante la segunda mitad de la década de los 80's[5], toda la década de los 90's y parte de el primer lustro del nuevo milenio. Este fenómeno es llamado "La Gran Moderación" y fue acuñado por Stock y Watson (2002). Estos autores encontraron que la volatilidad de la tasa de crecimiento anual del PBI entre 1960 y 2001 (des. est. = 2.3 %) es mayor que la volatilidad entre 1990 y el 2001 (des. est. = 1.5 %). Uno de sus principales hallazgos fue que la reducción de la volatilidad no solo se encontraba en la tasa de crecimiento del PBI, sino a lo largo de toda la economía. Es decir, el crecimiento del empleo, del consumo y del PBI sectorial también mostraron una reducción significativa en su volatilidad en el mismo periodo. Estos hallaz-

[5] McConnell y Perez Quiros (2000) fueron los que encontraron un primer indicio de esta "moderación", pero solo indicaron que la reducción de la volatilidad estaba enfocada en la producción de bienes durables. Además, estos autores encontraron que el quiebre estructural en el que la volatilidad empezó a moderarse fue el primer trimestre de 1984. Stock y Watson (2002) confirmaron este hallazgo con ciertas diferencias.

gos iniciaron un conjunto de investigaciones para explicar las fuentes de esta "moderación" (por ejemplo Davis y Kahn, 2008).

[Obs2] El consumo parece ser menos volátil que el PBI, pero parece estar fuertemente correlacionada positivamente con el producto.

[Obs3] La inversión parece ser más volátil que el PBI. Además, es más volátil que el consumo. Entre la observación 2 y 3 se concluye que: $\sigma_{\text{inversión}} > \sigma_{\text{PBI}} > \sigma_{\text{consumo}}$, donde σ_x representa la volatilidad.

[Obs4] El stock de capital parece tener muy poca volatilidad en comparación con el PBI y además parece tener poca correlación con el producto.

[Obs5] El total de horas parace ser un poco más volátil que el PBI y tener una alta correlación con el producto.

[Obs6] El empleo parece ser tan volátil como el PBI y tener una correlación postiva con esta variable. Además, parace que el empleo es casí tan volátil como el número de horas.

[Obs7] La volatilidad del salario real parace haber aumentado en el tiempo. Además, entre 1954 y mediados de 1980 la volatilidad del salario real parece ser mucho menor que del PBI; sin embargo, desde la segunda mitad de 1980 hasta el 2015 parece que la volatilidad del salario real y PBI son muy cercanas.

[Obs8] La productividad laboral parece tener una volatilidad menor que la del PBI.

[C.3] Cálculo de los estadísticos: el cuadro [1.2] resume los principales estádisticos del componente cíclico de las variables macroeconómicas, el cual complementa lo observado gráficamente. Algunas conclusiones se pueden desprender de estos cálculos.

En primer lugar, la inversión muestra una mayor volatilidad (5.5 %) que el resto de variables. Asimismo, se observa que su volatilidad es mayor que la del PBI (1.52 %) y a su vez está es mayor que la del consumo (0.81 %). De otro lado, la variable que tiene menor volatilidad es el stock de capital (0.26 %); es decir, esta variable es más estable que las demás. En cuanto a las variables del mercado de trabajo se observa que el total de horas trabajadas y el empleo tienen una volatilidad muy cercana al del PBI, aunque el empleo tiene menor volatilidad que el número de horas trabajas (1.56 % vs 1.86 %). Esto sugiere que el ciclo económico se manifiesta claramente en el mercado de trabajo tal como lo menciona Cooley y Prescott (1995).

Al comparar la volatilidad del salario real con las horas trabajadas y el empleo, se concluye que el salario real es menos volátil que dichas variables, inclusive la volatilidad del salario real representa el 50 % de la volatilidad de horas totales y el 60 % del empleo. En los modelos RBC, este hecho estilizado se podría capturar (parcialmente) bajo el supuesto de una oferta de trabajo con alta elasticidad; sin embargo, como veremos en el capítulo 6 (modelo de Hansen, 1985), los datos microeconómicos sugieren que dicha elasticidad es baja. Ante ello Hansen (1985) desarrolló una extensión del modelo RBC básico con el cual

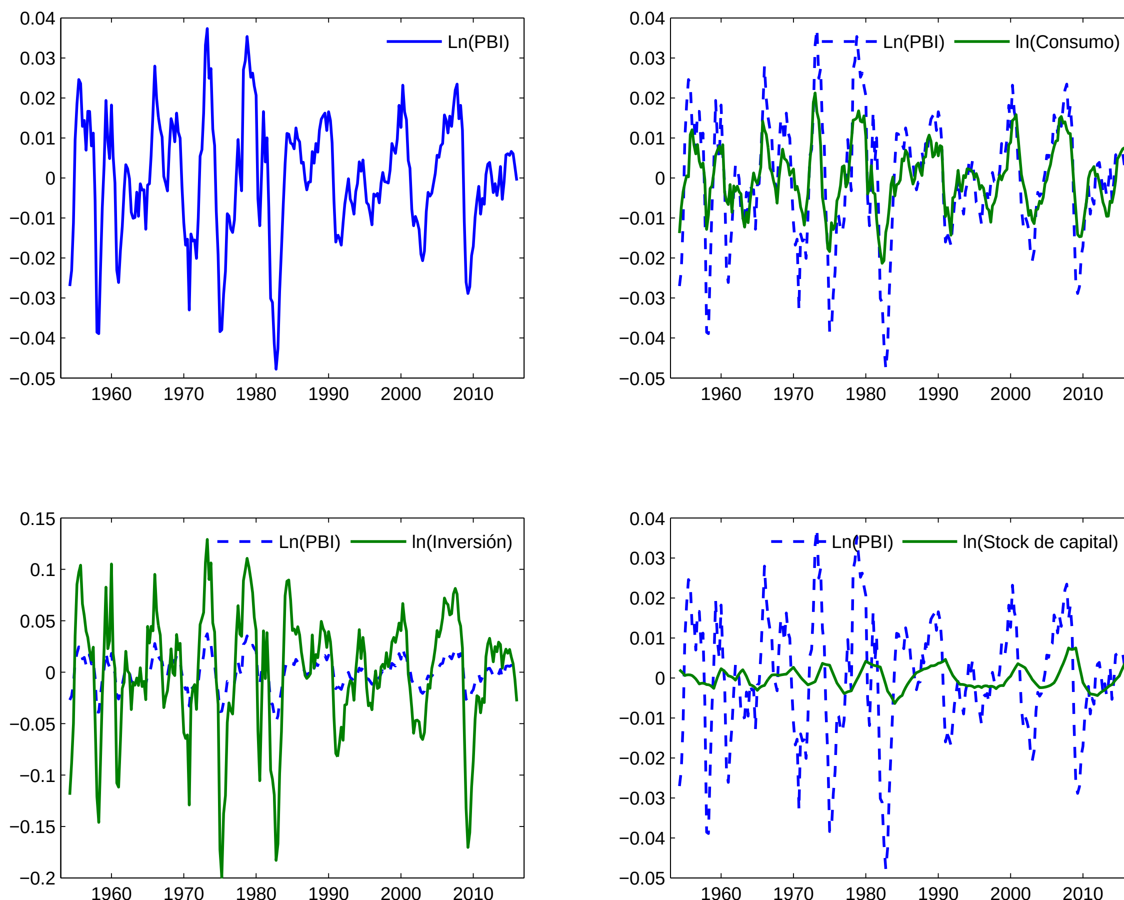


Figura 1.12. Componente cíclico de las series económicas de Estados Unidos (1954.1-2015.4)
El componente cíclico se ha obtenido al aplicar el fitro HP a las variables en logarítmo (per-cápita) con el parámetro de suavizamiento $\lambda = 1600$.

superó parcialmente esta debilidad.

En segundo lugar, la volatilidad de la inversión es aproximadamente cuatro veces la del PBI y la del capital es 0.17 veces la del PBI. Esto sugiere que aunque la inversión puede ser muy volátil a causa del comportamiento de los inversionistas, el stock de capital acumulado tiene un comportamiento suavizado en el tiempo. Es más, la volatilidad de la inversión es 22.8 veces la del capital.

En tercer lugar, aunque el stock de capital tiene una baja volatilidad, esta variable tiene una alta persistencia reflejada en su autocorrelación (0.96). En general todas las variables, excepto el salario real y la productividad, muestran niveles de persistencia superiores a 0.8; inclusive la horas trabajadas y el empleo superan el 0.9 de autocorrelación. Conviene subrayar que el salario real y la productividad muestran volatilidades similares (0.96 % vs 0.94 %) y autocorrelaciones relativamente cercanas (0.69 y 0.79).

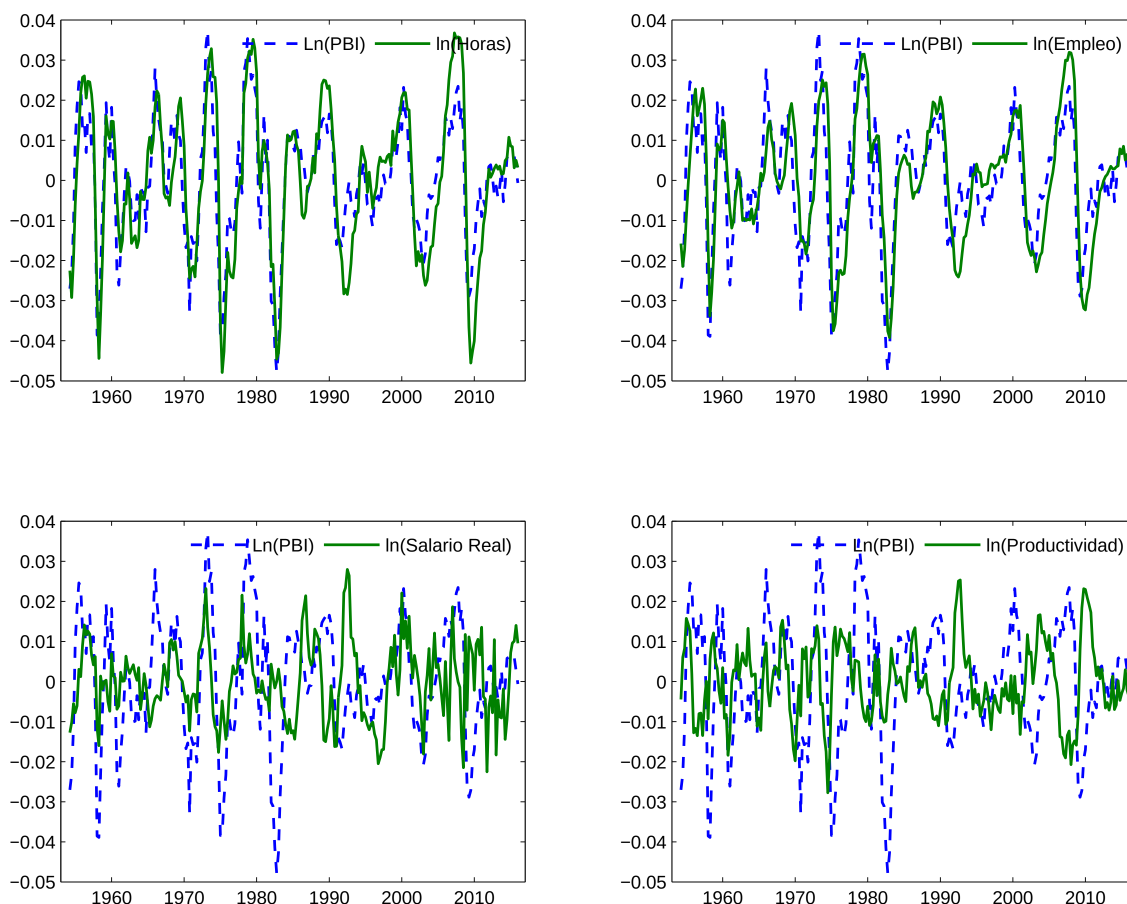


Figura 1.13. Componente cíclico de las series económicas de Estados Unidos (1954.1-2015.4)
El componente cíclico se ha obtenido al aplicar el fitro HP a las variables en logarítmo (per-cápita) con el parámetro de suavizamiento $\lambda = 1600$.

En cuarto lugar, se observa que el consumo, la inversión, las horas trabajadas y el empleo son altamente procíclicos (correlación con el PBI superior a 0.8); de otro lado, se aprecia que el stock de capital es eventualmente acíclico dado que presenta una correlación con el PBI cercana a cero (0.08). Asimismo, el salario real es ligeramente procíclico (correlación con el PBI de 0.22).

En quinto lugar, se observa que la correlación entre el PBI y la productividad laboral es negativa (-0.1); es decir, esto sugiere que la productividad es contracíclica. Este resultado, en primera instancia, parece ser contraintuitivo debido a que usualmente en los modelos RBC se ha considerado que la productividad laboral es procíclica. Sin embargo, estudios recientes sugieren que la correlación entre el PBI y la productividad laboral ha ido disminuyendo e inclusive ha pasado a ser negativa. El primer estudio que mostró esta "nueva" característica del ciclo económico del Estados Unidos fue la realizada por Kevin Stiroh en 2009, bajo el título "*Volatility Accounting: As Production Perspective on In-*

Cuadro 1.2: Estadísticos descriptivos del componente cíclico de las series de Estados Unidos (1954.1-2015.4)

Variable	Volatilidad (Des. Est. %)	Volatilidad relativa	Autocorrelación	Correlación con el PBI
PBI	1.52	1	0.85	1
Consumo	0.81	0.53	0.88	0.82
Inversión	5.95	3.91	0.83	0.93
Stock de capital	0.26	0.17	0.96	0.08
Horas	1.86	1.23	0.91	0.87
Empleo	1.56	1.03	0.93	0.8
Salario real	0.96	0.63	0.69	0.22
Productividad	0.94	0.62	0.79	-0.1

creased Economic Stability". Esta investigación inicio una discusión académica sobre los posibles factores que expliquen este comportamiento (por ejemplo, Galí y Rens (2010), y Fernald y Wang (2016)).

La figura [1.14] muestra la correlación del componente cíclico del PBI real con el componente cíclico de la productividad laboral. Cada valor de dicha correlación es calculado desde el primer trimestre de 1954 hasta el cuarto trimestre del año que se muestra en el eje horizontal; por ejemplo, el valor de 7 % que aparece en el año 1980 (primera barra azúl) se ha calculado considerando la muestra desde 1954.1 hasta 1980.4. De igual forma para el valor asociado a 1982 (superior a 10 %) se ha calculado con la muestra 1954.1-1982.4.

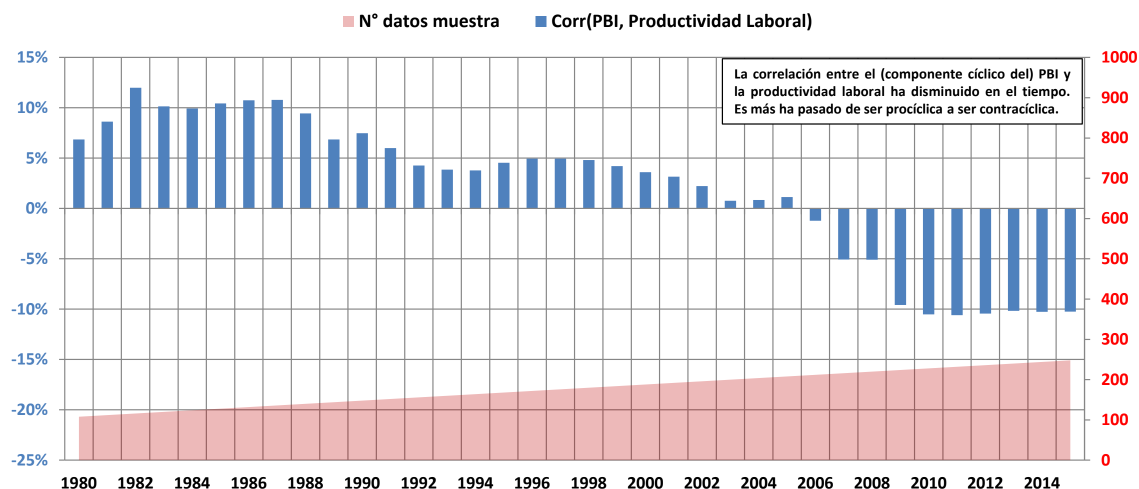


Figura 1.14. Correlación entre el PBI (componente cíclico) y la Productividad Laboral (componente cíclico) (1954.1-2015.4)

Esta figura muestra claramente como la correlación entre ambas variables ha disminuido en el tiempo. Este comportamiento se puede separar en cuatro etapas: la primera es en la década de los 80's, donde dicha correlación alcanzó un valor promedio de 10 %; la

segunda etapa es en la década de los 90's, en la cual dicha correlación mostró una primera reducción (valor promedio de 5 %) pero mantenía el comportamiento procíclico. La tercera etapa se desarrolla en el primer lustro del nuevo milenio donde la correlación llega a valores cercanos a cero (2 % en promedio). La última etapa que comprende desde el 2006 hasta 2015, la correlación mantiene niveles negativos; es decir, la productividad laboral presenta un comportamiento contracíclico.

1.3. Perspectiva histórica de la teoría RBC

1.3.1. Panorama de las escuelas de pensamiento económico

En la figura [1.15] se esboza la evolución de la teoría macroeconómica desde un punto de vista histórico. Esta figura no es exhaustiva en considerar todas las corrientes de pensamiento económico; sin embargo, presenta un panorama general de las escuelas económicas.

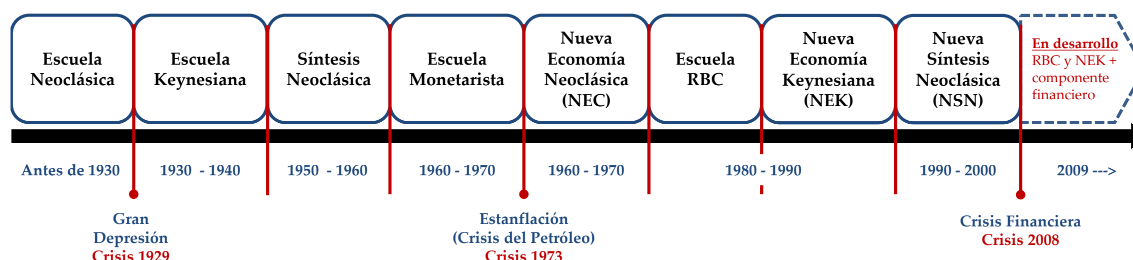


Figura 1.15. Desarrollo histórico de las escuelas en macroeconomía

El siglo XX e inicios del siglo XXI ha estado marcado por al menos tres crisis económicas trascedentales. La primera se manifesto en 1929 con la caída de la Bolsa de Valores de Estados Unidos, cuyos efectos fueron globales y persistentes. A esta crisis se le llamó la Gran Depresión. Este evento tuvo al menos dos impactos importantes: el primero es que evidencio la debilidad de la escuela Neoclásica para explicar dicho fenómeno. Asimismo, dicha escuela no pudo dar una solución a esta crisis. El segundo efecto es que surgio la escuela Keynesiana como una alternativa para explicar esta crisis y para proponer algunas políticas económicas que mitigaran sus efectos.

La escuela Keynesia se origino con la Teoría General de Keynes en 1936. En dicha investigación, Keynes ofrecia una interpretación de la Gran Depresión y un marco teórico sólido con un argumento para la intervención del estado en la economía.

Una de las ideas centrales de Keynes fue que la economía de mercado es inherentemente inestable. Dicha inestabilidad provoca situaciones donde el nivel de actividad se coloca por debajo del pleno empleo sin que el mercado por si solo pueda recuperarse. Dicha situación produce un nivel de desempleo que, según Keynes, tiene un carácter involuntario y que es el reflejo de una insuficiencia del nivel de demanda. Dado que el mercado no garantiza el regreso al equilibrio, Keynes sugiere que la política económica puede corregir esta inestabilidad agregada con el fin de llevar a la economía al pleno empleo. Esto claramente constrasta con el pilar fundamental del paradigma neoclásico: "la tendencia automática

hacia el pleno empleo".

Otras ideas importantes en la revolución Keynesiana son: [1] la dependencia del nivel de actividad y de nivel de empleo respecto a la demanda efectiva, [2] el papel crucial que las expectativas juegan en un mundo con incertidumbre (*animal spirits*), [3] la concepción de los mercados como mecanismos rígidos e imperfectos, por lo que no se produce el vaciado continuo de los mismos, y [4] el papel esencial asignado a la política económica, destinada a influir sobre la demanda efectiva de la economía. Algunos de estos elementos se operacionalizaron, en cierto sentido, en el modelo IS-LM elaborado por Hicks(1937) y Hansen (1949,1953). Las ideas principales de Keynes y el modelo IS-LM formaron las bases para lo que se conoce como "La Sintesis Neoclásica", que dominó la teoría económica durante los años 50's y 60's.

La Síntesis Neoclásica, término propuesto por Samuelson (1955), reconciliaba el enfoque Neoclásico con el enfoque Keynesiano. Entre 1950 y 1970 se acepto en la academía la idea que el modelo Neoclásico era relevante para temas microeconómicos y para el análisis de crecimiento económico, mientras que el modelo Keynesiano era el más adecuado para el análisis de corto plazo. Cabe destacar que la Sintesis Neoclásica tiene tres principales elementos: el modelo IS-LM para economía cerrada, el modelo IS-LM para economía abierta, y la curva de Phillips. Esta escuela de pensamiento dominó la teoría macroeconómica entre 1950 y 1970 hasta la aparición de la segunda crisis del siglo XX.

La segunda crisis del siglo XX estuvo asociada al precio del petroleo. En 1973 la OPEP (Organización de Países Árabes Exportadores de Petróleo) decidio restringir las exportaciones de petroleo a los países que apoyaron a Israel en la guerra llamada Yom Kipur, la cual se desarrolló en octubre de 1973. Esta decisión afecto a Estados Unidos y algunos países de Europa. La restricción del petroleo incrementó su precio y dado que los países industrializados de dicha época dependían fuertemente del petroleo se vieron obligados a reducir su producción de bienes, lo cual finalmente incrementó los precios. El alto desempleo y la alta inflación, conocido como estanflación, fue la característica de esta crisis.

Esta crisis mostró al menos dos debilidades principales de la Síntesis Neoclásica. La primera debilidad es en el *ámbito teórico* y se refiere a que esta escuela no pudo explicar la estanflación; esto es debido a que la curva de Phillips solo contemplaba un relación inversa entre el desempleo y la inflación; sin embargo, en la crisis del 70's se observó que ambos aumentaron. La segunda debilidad es en el *ámbito metodológico*, la cual hace mención a que dicha escuela no consideró expectativas racionales en su modelación (Crítica de Lucas). Todo ello llevó a que se desconfiara de las recomendaciones de política económica de la Síntesis Keynesiana y dio lugar al resurgimiento de ideas Neoclásicas bajo un nuevo enfoque llamada la Nueva Economía Clásica (NEC), la cual fue liderada por Robert Lucas.

La novedoso de la NEC es que esta escuela propone una nueva forma de hacer macroeconomía. La NEC sostenía que los modelos macroeconómicos se construían a partir de la conducta de agentes racionales, los cuales optimizaban sus decisiones en un entorno estocástico y dinámico. Esto es contrario al enfoque de Síntesis Neoclásica donde no había optimización y los modelos usualmente eran estáticos. Además, la NEC asume que los modelos son walracianos en el sentido que los mercados estaban en equilibrio en

cada momento. Estos modelos incorporan una oferta agregada basada en dos supuestos microeconómicos ortodoxos: las decisiones racionales tomadas por los trabajadores y las empresas en términos de su comportamiento optimizador y, en segundo lugar, que la oferta de trabajo y el nivel de producción de las empresas dependen de precios relativos (Lucas, 1972, 1973). Asimismo, la NEC en su modelación considera expectativas racionales y así supera la crítica de Lucas.

De otro lado, la NEC descansa en tres principales conjuntos de supuestos. El primero son con respecto al comportamiento de los *agentes*: se asume que son racionales en el sentido que optimizan su función de utilidad/beneficios sujeta a determinadas restricciones. Además, se usa el supuesto del agente representativo y se asume que los agentes no se dejan llevar por la ilusión monetaria; es decir, toman sus decisiones en base a variables reales. Asimismo, las expectativas son racionales, en el sentido que se usa toda la información disponible y no se comete errores sistemáticos. Finalmente, la información no siempre es completa y se usa optimamente y no es asimétrica, lo que elimina los problemas de selección adversa o riesgo moral.

El segundo conjunto de supuestos son con respecto a las caracteríticas de los *mercados*: se asume que existe competencia perfecta en todos los mercados y que los mercados se vacian continuamente dada la flexibilidad de precios. El tercer conjunto de supuestos se refieren a temas *Metodológicos*: los modelos deben de tener una fundamentación microeconómica estricta. Las expectativas deben ser introducidas de forma coherente con el modelo (expectativas racionales). Además, los modelos deben ser dinámicos y de equilibrio general y deben de evitar la crítica de Lucas.

Todo ello, la nueva forma de hacer macroeconomía y sus principales supuestos, llevo a que la Nueva Economía Clásica se convirtiera en el principal enfoque macroeconómico durante la década de los 70's.

A inicios de decáda de los 80's surgio una vertiente de la NEC llamada modelos de Ciclos Económicos Reales (RBC). A diferencia de la NEC, quienes consideraban que el principal impulso de los ciclos económicos es un *choque nominal (monetario)*, la escuela RBC consideraba que el principal impulso es un *choque real*. Con esta principal diferencia pero bajo los mismos supuestos de la escuela NEC, la escuela RBC ganó protagonismo en los 80's y la primera mitad de los 90's debido a la capacidad de replicar los hechos estilizados de la economía norteamericana. Aunque en el siguiente apartado se describirá con mayor detalle su evolución, vale la pena subrayar dos ideas importante: la primera es que los modelos RBC han llegado a ser un punto de partida de varios modelos (teorías) que *no* consideran al choque real (o tecnológico) como principal mecanismo de impulso, y la segunda idea es que los modelos RBC se usan como laboratorios para análisis de políticas en línea con lo propuesto por Lucas (1980).

En la década de los 80´s y 90´s, de manera paralela a los modelos RBC, se desarrolló un enfoque Keynesiano pero con nuevos elementos microeconómicos. A esta escuela se le conoce como la Nueva Economía Keynesiana y hace énfasis en la competencia monopolística y en el ajuste costoso de precios. Tal como lo señala Goodfriend y King (1998), se puede distinguir tres generaciones de modelos NEK: la primera introduce expectativas

racionales en la modelación del precio/salario (Taylor, 1980; Gordon, 1982). La segunda generación pasa de investigar la rigidez de salarios a investigar la rigidez de los precios. Además, las empresas son modeladas en competencia monopolística y son usadas para explicar los efectos del dinero sobre el producto cuando existen rigideces de precios. La tercera generación de modelos NEK se evalúa la mejor forma de introducir modelos de precios dinámicos en la formulación de competencia monopolística. El enfoque *dependiente del estado* era atractivo por sus fundamentos microeconómicos; sin embargo, era muy difícil introducirlo en un modelo macroeconómico. Una alternativa fue utilizar el enfoque *dependiente del tiempo* desarrollada por Calvo (1983). La ventaja de este enfoque es que su incorporación en los modelos macroeconómicos no presentaba dificultades.

A mediados de los 90´s surge un consenso entre los modelos RBC y los modelos NEK. A este consenso se le conoce como la Nueva Sintesis Neoclásica (NSN) (Goodfriend y King, 1998). La NSN está basada, por un lado, en los modelos RBC al incorporar optimización intertemporal y expectativas racionales dentro de modelos macroeconómios dinámicos. De otro lado, la NSN toma elementos de la NEK tales como competencia monopolística y ajuste costoso de precios (rigidez de precios). El modelo principal de la NSN se resume en tres ecuaciones: la IS dinámica, la curva de Phillips y la regla de política monetaria. La NSN ha dominado la forma de hacer macroeconomía hasta la actualidad. La crisis financiera del 2008 hizo que se repensara en algunos supuestos de la NSN, los cuales en la actulidad se estan evaluando.

La tercera crisis se gestó en los primeros años del siglo XXI y finalmente se materializó en el 2008, la cual se conoce como la crisis financiera del 2008. El origen de esta crisis se encuentra en el colapso de la burbuja inmobiliaria en Estados Unidos en el 2006 y que luego provocó una crisis de las hipotecas subprime. Los efectos de esta crisis se volvieron globales en el 2008 produciendo una crisis de liquidez internacional. Ante esta crisis, el modelo NSN quedó limitado debido a que las tasas de interés internacionales estaban en niveles muy bajos (cercanos a cero), lo cual impedía utilizar la regla de Taylor para alentar la economía. Uno de los principales cuestionamientos a estos modelos fue la ausencia del sector financiero. Actualmente se esta incorporando elementos del sistema financiero dentro de los modelos NEK y RBC. La idea de ello es evaluar el desempeño de estos modelos en explicar la crisis financiera y evaluar políticas alternativas que suavicen el ciclo económico.

1.3.2. El desarrollo histórico de la escuela RBC

La década de los 80's y la primera mitad de los 90's fueron testigos del desarrollo de la teoría de los ciclos económicos reales. El modelo inicial propuesto por Kydland y Prescott (1982) fue extendido en varias direcciones. Dichas direcciones incluyen el estudio del dinero, mercado de trabajo, gasto público, activos financieros, competencia imperfecta y economía abierta en el marco teórico propuesto por la escuela RBC. El objetivo de todas estas investigaciones fue ganar entendimiento acerca de cómo estas variables ayudan a explicar el ciclo económico. Para entender cómo las principales ideas de esta escuela de pensamiento económico han evolucionado es necesario estudiar cronológicamente las diferentes investigaciones asociadas a los ciclos económicos reales, las cuales en su conjunto brindan una visión holística de la escuela RBC.

En 1981 surgio una nueva técnica para separar el componente ciclico de la tendencia de una variable. Esta técnica fue propuesta por Hodrick y Prescott(1981), quienes realizaron un estudio empírico de los ciclos para EEUU después de la II guerra mundial. Estos autores propusieron una metodología para separar el ciclo y la tendencia de una serie, la cual se conoce como Filtro HP. Bajo esta metodología Hodrick y Prescott encontraron regularidades empíricas de los ciclos (volatilidad, comovimientos y persistencia).

Kydland y Prescott publicaron una investigación en 1982, en la cual utilizaron la teoría del crecimiento neoclásico con algunas modificaciones para estudiar los ciclos económicos. Una de las modificaciones principales fue el supuesto que la construcción del capital toma varios periodos y no solo uno como era el supuesto del modelo de crecimiento neoclásico. Este supuesto es sumamente importante para explicar las fluctuaciones agregadas debido a que se comporta como un mecanismo de transmisión con persistencia durante varios periodos. Además, la otra modificación que consideraron los autores fue que la función de utilidad debe ser no separable temporalmente, la cual presenta una alta sustitución intertemporal del ocio. En este contexto el único choque que explica las fluctuaciones es el de productividad.

Bajo los supuestos de su modelo, Kydland y Prescott tuvieron exito en replicar varias características observadas en las series macroeconómicas de EEUU despues de la II guerra mundial; por ejemplo, el modelo sugiere que la desviación estándar de la inversión es 6.45 % mientras que los datos indican que esta es 5.1 %. Cabe mencionar que estos autores utilizaron el filtro HP para separar el ciclo de la tendencia de principales variables macroeconómicas tanto de los datos como del modelo. Con este modelo y sus resultados estos autores iniciaron la Teoría de los Ciclos Económicos Reales.

Según Rebelo (2005), de la investigación de Kydland y Prescott (1982) surgieron tres ideas revolucionarias: la primera es que los ciclos económicos se pueden estudiar usando modelos de equilibrio general dinámicos. La segunda es que estos autores unificaron la teoría del **crecimiento económico** y de los **ciclos económicos**. Además, los modelos de ciclos económicos deben ser consistentes con regularidades empíricas de crecimiento de largo plazo. Finalmente, en su investigación Kydland y Prescott dieron importancia al análisis cuantitativo al comparar las propiedades del modelo con hechos estilizados.

El aporte de Kydland y Prescott (1982) se podría al menos resumir en dos grupos. Por un lado los supuestos que consideraron en su propuesta, los cuales fueron suficientes para acercarce a los hechos estilizados de los ciclos económicos de Estados Unidos. Por otro lado, su influencia en las investigaciones futuras, no solo de las que hacen énfasis en el lado de la oferta (o variables reales) como mecanismos de impulso (productividad) sino en aquellas que consideran que la principal causa de las fluctuaciones se encuentran en el lado de la demanda y de las variables nominales.

En línea con lo anterior, los *principales supuestos* considerados por Kydland y Prescott (1982) y que luego han formado parte de los modelos RBC son: [1] los agentes responden de manera óptima a los eventos económicos todo el tiempo, [2] las fluctuaciones del producto proviene de fuentes reales; es decir, los ciclos económicos son consecuencia del cambio *exógeno* de la productividad. [3] el trabajo fluctúa por la sustitución intertemporal del ocio (o del trabajo). [4] el producto es persistente por el efecto del *mecanismo de propagación interna: acumulación de capital*. [5] la inversión es más volátil que el consumo, porque los agentes prefieren suavizar su consumo y trasladar cualquier movimiento transitorio en su ingreso al ahorro (inversión).

Asimismo, las investigaciones que partieron de Kydland y Prescott (1982) se les denominó "Modelos RBC" debido al énfasis en el rol del "choque real". Estos modelos han llegado a ser un punto de partida de varias teorías que **no consideran** al cambio (choque) tecnológico como principal mecanismo de impulso; por ejemplo, los modelos de la Nueva Economía Keynesiana (NEK) en su modelo básico de tres ecuaciones (IS dinámica, curva de Phillips y la regla de política monetaria) considera tres choques (de demanda, de productividad y de política monetaria), cada uno asociado a cada ecuación. Un aporte adicional es que los modelos RBC se pueden utilizar como *laboratorios* para análisis de políticas en línea con lo propuesto por Lucas (1980).

Long y Plosser en 1983 publicaron una investigación que buscaba explicar los movimientos conjuntos de las variables económicas de los diversos sectores productivos tales como agricultura, minería, construcción, etc. Para ello propusieron un modelo sustentado en dos gruos de hipótesis: las hipotesis de las preferencias (familias) y las hipótesis de las posibilidades de producción (empresas). En particular, el objetivo de estos autores fue evaluar la capacidad de estas hipótesis en explicar el comportamiento del ciclo económico (a nivel agregado y sectorial).

Usualmente, cuando se estudia las hipótesis sobre las preferencia se hace enfasis en su implicancia intratemporal (enfoque estático), el cual indica que ante un incremento inesperado de riqueza el consumidor incrementa su (demanda de) consumo **actual** de bienes y de ocio. Además de esto, Long y Plosser, en su investigación, resaltan que estas hipótesis también tienen implicancia intertemporal (enfoque dinámico), la cual sugiere que el mismo choque de riqueza incentiva al consumidor incrementar su (demanda de) consumo **futuro** de bienes (incluyendo el ocio). La implicancia principal de esto último es que el consumo (de diferentes bienes) como serie de tiempo presenta comovimientos y persistencia.

Aunque las hipótesis de preferencias ayudan a describir el comovimiento y persistencia del consumo, no logran explicar a qué se debe estas características. Esto se debe a que

se requiere del movimiento de los precios para que el consumo (demanda) encuentre su contraparte en el lado de la producción (oferta). Es por ello que para tener un mejor entendimiento de los movimientos ciclicos de las variables se debe de considerar las hipótesis de posibilidades de producción. En este aspecto, Long y Plosser (1983) suponen una función de producción neoclásica (descrita en el capítulo 3); además, suponen que todos los bienes son perecibles; es decir, que todos los bienes disponibles al inicio del periodo actual son *nuevas unidades* producidas al inicio de este periodo. En términos prácticos se asume que la tasa de depreciación es igual a uno.

La principal conclusión de Long y Plosser(1983) fue que las propiedades de series de tiempo derivadas del modelo muestran cierto acercamiento a los encontrados en los datos. Asimismo, los autores reconocen que este modelo no captura todas las regularidades empíricas debido, en parte, al supuesto de depreciación total; sin embargo, este modelo es un buen punto de partidad (*benchmark*) para evaluar la inclusión de otros factores como dinero, política fiscal, etc.

En 1985 surgieron dos investigaciones que marcaron un hito en la escuela RBC. La primera es el modelo de Hansen y la segunda el modelo de Mehra y Prescott.

Una de los principales críticas al modelo de Kydland y Prescott (1982) fue que el modelo no capturaba la alta volatilidad de las horas trabajadas y la baja volatilidad del salario real. Esta crítica, en parte, está basada en que el modelo de Kydland y Prescott (1982) consideraba que no existe desempleo y que la volatilidad de las horas de trabajo se debe solo a que el trabajador ajusta su número de horas laborales. Sin embargo, Hansen (1985) encontró que los datos sugieren que el 55 % de la varianza del "total de horas de trabajo" es explicada por el número de trabajadores que entran y salen del mercado laboral, y solo el 20 % es explicado por las horas de trabajo de cada individuo. Esto llevó a Hansen a postular el principal supuesto de su modelo: "el individuo decide trabajar un número de horas fijas o no trabajar"; es decir, el trabajo es *indivisible*. El principal resultado del modelo de Hansen es que este modelo explica la alta volatilidad del empleo en comparación con el salario sin necesitar una alta elasticidad de sustitución del ocio, el cual es consistente con los datos.

De otro lado, Mehra y Prescott (1985) publicaron una investigación en la cual se preguntaban si el modelo RBC podría capturar dos hechos estilizados de las series financieras: la primera corresponde al promedio histórico del retorno real de los activos riesgosos (SP500), la cual es 6.98 % para el periodo 1889-1978, y la segunda es mismo momento empírico para el retorno real de los activos libre de riesgo (*treasure bill*), el cual es 0.8 % para el mismo periodo. Bajo estos datos, se obtiene que la prima de riesgo es 6.18 % en promedio. Los resultados del modelo de estos autores sugieren que el modelo RBC es capaz de capturar las características cualitativas de las relaciones entre las series financieras y macroeconómicas, pero no sus características cuantitativas. Los autores indican que la máxima prima por riesgo que el modelo puede generar es 0.35 %. Este resultado abrió una línea de investigación importante que ha buscado resolver este enigma.

Hasta aquí los modelos RBC habían hecho énfasis en el choque de productividad; es decir, el choque del lado de la oferta. Sin embargo, el pensamiento Keynesiano sugería

que las fluctuaciones económicas se debe principalmente a los movimientos de la inversión. Con esto en mente, Greenwood et al (1988) introdujeron dos características al modelo RBC estándar. La primera es que no solo se considera el capital físico sino también los servicios que este brinda por medio de una tasa de utilización. Es decir, no solo considera por ejemplo una computadora (bien de capital), sino también el número de horas que se utiliza este bien, a la cual se le conoce como tasa de utilización. Un impacto de esta tasa de utilización es que el capital se deprecia más rapidamente. La segunda es que el choque que se considera no es el de productividad sino uno asociado a la eficiencia marginal de la inversión; es decir, con este choque una unidad de inversión produce mas de una unidad de capital en el periodo siguiente. La principal conclusión de este modelo es que el choque a la inversión bajo el mecanismo descrito podría ser un elemento importante para explicar los ciclos económicos.

De otro lado, Cooley y Hansen (1989) estudiaron el rol del dinero en las fluctuaciones económicas. Para ello, los autores utilizaron el modelo RBC estándar, al cual incorporaron el dinero por medio de una restricción *cash-in-advance*. Con este modelo, los autores procuraron estimar los costos de bienestar provocados por el impuesto inflacionario, y estudiaron los efectos de la inflación anticipada sobre las características de las series económicas. La principal conclusión es que en el corto plazo el dinero sí presenta correlación con el producto; sin embargo, las características de los ciclos económicos de una economía con alta y baja inflación son similares. Esto sugiere que bajo los supuestos del modelo, el dinero no ayuda a explicar mejor los ciclos económicos.

En 1991, Benhabib, Rogerson y Wright consideraron la producción del hogar en un modelo RBC para evaluar si esta extensión podría ayudar a fortalecer el desempeño cuantitativo del modelo. El resultado fue que este modelo captura mejor los momentos empíricos de los ciclos económicos. Por ejemplo, el modelo de Hansen (1985) obtenia el valor de 1.29 para la desviación estándar del PBI, mientras que el modelo Benhabib et al (1991) registraba 1.71, el cual es más cercano a lo sugerido por los datos (1.74). Asimismo, el modelo de Hansen (1985) sobreestimaba la desviación estándar de la inversión (3.14 del modelo vs 2.82 de los datos). En cambio, el modelo de Benhabib et al (1991) infiere que la desviación estándar de la inversión es igual a 2.73, siendo esto más cercano a los datos.

Una de las principales críticas de los modelos RBC es que no captura la baja correlación entre el número de horas laborales y el salario real. Los datos sugieren que esta correlación es muy cercana a cero, mientras que los modelos RBC (trabajo divisible/indivisible) indican que es cercana a 0.951/0.915 respectivamente. Ante esta deficiencia del modelo, Christiano y Eichenbaum[6] en 1992 publicaron una investigación donde al considerar el consumo público en el modelo RBC de Hansen (1985), se obtiene que el modelo captura un poco mejor dicha correlación (entre 0.5 y 0.7). El consumo de gobierno tiene influencia en la economía por dos vías: la primera es que parte del consumo público se

[6]Una investigación previa de estos autores se encuentra en el 1988, en la cual cuestionan la afirmación de Prescott (1986) que la “teoría es antes que la medición”. El principal argumento de Christiano y Eichenbaum es que los modelos RBC no capturan la observación de Dunlop-Tarshis, que indica que la correlación entre el número de horas trabajas y el salario real es cercana a cero. Bajo este argumento los autores concluyen que el choque de productividad no puede ser la única fuente de fluctuaciones económicas después de la segunda guerra mundial.

considera dentro de la canasta de consumo de las familias. La segunda es que el gasto público se comporta como un choque que tiene un componente permanente y transitorio. Un característica interesante de esta investigación es que no usa la *calibración* como los modelos RBC estándar, sino que los autores utilizan una técnica econométrica (Método Generalizado de Momentos -GMM-) para estimar los ocho parámetros estructurales, dejando solo tres bajo el enfoque de calibración.

De otro lado, en 1993, Baxter y King publicaron un estudio en el que evaluaban los efectos macroeconómicos de la política fiscal en un modelo RBC. Aunque el objetivo no fue evaluar si la política fiscal es una fuente de los ciclos económicos, su investigación es relevante para entender los efectos de corto y de largo plazo de gasto temporal y permamente del gobierno. En este modelo el gobierno influencia a las familias por medio de las transferencias y por medio de la función de utilidad: se supone que el capital y el gasto del gobierno incrementan el nivel de la utilidad del consumidor pero no su utilidad marginal. Además, la influencia del gobierno a las empresas se obtiene por medio del capital gubernamental que actúa como un factor en la función de producción. La racionalidad de esto radica en que las empresas necesitan bienes públicos como caminos, carreteras, etc que influyen en su producción.

Uno de los principales supuestos de los modelos RBC es que todos los mercados (bienes y factores) tienen una estructura de competencia perfecta, lo cual sugiere que el precio es igual al costo marginal. Sin embargo, los datos sugieren que el precio eventualmente es mayor que el costo marginal, es decir que el mark-up ($\mu = \frac{p_t}{cmg_t}$) es mayor a uno. Bajo este y otros hechos empíricos, Rotemberg y Woodford en 1993 publicaron un artículo donde introducen la estructura de competencia monopolística en un modelo RBC. En este escenario los autores analizaron cómo esta nueva estructura de mercado podría influenciar en la transmisión del choque de productividad especialmente por medio de su influencia en la demanda de trabajo. Además, bajo esta estructura, el análisis de un choque al mark-up podría brindar un nuevo mecanismo de impulso para explicar los ciclos.

Cogley y Nason en 1995 publicaron una investigación en la cual evaluaban la capacidad del modelo RBC estándar en capturar dos hechos estilizados de la dinámica del producto nacional bruto (PNB) en Estados Unidos: la primera es que el PNB está positivamente autocorrelacionado en el corto plazo y negativamente (pero ligero) en el largo plazo, y la segunda es el PNB parece tener un componente importante de *reversión a la tendencia*[7], la cual tiene una representación de medias móviles con forma de joroba. Los resultados de esta investigación sugieren que el modelo RBC estándar necesita un factor exógeno fuerte para replicar ambos hechos estilizados. Esto se debe a que la mayoría de modelos RBC tienen un mecanismo de propagación interno débil. Además, estos autores indican que los modelos RBC que consideran rezagos o costos de ajuste en el trabajo son parcialmente exitosos en capturar ambos hechos estilizados aunque de igual forma dependen de choques transitorios grandes (lo cual es implausible) para replicar el impulso-respuesta encontrados en los datos.

La crítica a los modelos RBC sugerida por Cogley y Nason (1995) son sostenidas por

[7]Reversión a la tendencia significa XXXXX

Rotemberg y Woodford en 1996, cuando publican una investigación en la cual demuestran que el modelo RBC estándar tiene dos debilidades empíricas. La primera es que el modelo sugiere que la varianza del producto es muy pequeña en comparación con lo observado. La segunda es que los co-movimientos entre el producto, el consumo y las horas laborales tienen la misma dirección en los datos, lo cual no es capturado por el modelo. Con el fin de mejorar la capacidad del modelo en capturar estos hechos estilizados, los autores realizan análisis de sensibilidad del valor de tres parámetros (elasticidad de la oferta de trabajo, la elasticidad de sustitución intertemporal y la participación del capital en el producto). El resultado de este esfuerzo es que el modelo mejora la volatilidad del producto pero no hay mayor efecto sobre los co-movimientos de las variables en mención.

Ante las principales críticas de Cogley y Nason (1995) y de Rotemberg y Woodford (1996), Burnside y Eichenbaum en 1996 analizan la importancia de la tasa de utilización del capital como mecanismo de transmisión, esto es para evaluar la posibilidad de fortalecer el mecanismo interno de propagación de los modelos RBC. Los resultados indican que esta variable es importante en términos cuantitativos para propagar los efectos de un choque de productividad. Un resultado natural de ello es que el choque necesario para capturar las regularidades empíricas del ciclo económico es significativamente menor a los modelos RBC estándar.

Los tres cuadros siguientes (1.3 a 1.5) muestran el desarrollo cronológico de las investigaciones en la escuela RBC. Estos cuadros no son exhaustivos en cuanto a todas las investigaciones desarrolladas entre 1980 y 1996, pero son referenciales en cuanto trata de señalar las principales investigaciones.

Cuadro 1.3: Desarrollo histórico de los modelos RBC

Autor	Año	Descripción
Hodrick y Prescott	1981	**Título:** *Post-War U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation.* **Tema:** propusieron un método de descomposición de una serie. **Aporte:** el objetivo del método es separar el componente ciclico y tendencial de una serie macroeconómica. Se le conoce como filtro HP.
Kydland y Prescott	1982	**Título:** *Time to Build and Aggregate Fluctuations* . **Tema:** utilización del modelo de crecimiento neoclásico para explicar los ciclos económicos. **Aporte:** el principal aporte fue explicar los ciclos económicos utilizando el modelo de crecimiento económico neoclásico con dos variantes: la primera es que se necesita más de un periodo para construir el capital y la segunda es que el consumidor enfrenta una función de utilidad no separable temporalmente. Con esta investigación se inicia la escuela RBC.
Long y Plosser	1983	**Título:** *Real Business Cycles* . **Tema:** modelo RBC con varios sectores económicos. **Aporte:** se demostró que con un modelo RBC sencillo se puede explicar algunos hechos estilizados de los ciclos económicos. Estos autores acuñaron el nombre "modelos RBC" para denotar a todos los modelos que enfatizan el choque de productividad como fuente principal del ciclo económico.
Hansen	1985	**Título:** *Indivisible Labor and the Business Cycle.* **Tema:** modelo RBC con trabajo indivisible. **Aporte:** con este modelo se superó la crítica que los modelos RBC necesitan que la elasticidad de sustitución del trabajo sea alta, lo cual no es lo observado por los datos. Este modelo se convirtio en el modelo RBC estándar.
Mehra y Prescott	1985	**Título:** *The Equity Premium: A Puzzle.* **Tema:** modelo RBC con prima por riesgo. **Aporte:** se evaluo si el modelo RBC con variables financieras pueden explicar el hecho estilizado de la prima por riesgo. Ellos encontraron que el modelo explica su comportamiento cualitativo pero no cuantitativo. Este resultado abrio una línea de investigación de largo aliento.

Cuadro 1.4: Desarrollo histórico de los modelos RBC (continuación)

Autor	Año	Descripción
Greenwood et al	1988	**Título:** *Investment, Capacity Utilization, and the Real Business Cycle.* **Tema:** modelo RBC con utilización variable del capital y choque a la eficiencia marginal de la inversión (EMgI). **Aporte:** fueron dos: [1] Evaluar desde un enfoque Keynesiano la fuente de los ciclos económicos (choque a la EMgI), [2] Se propuso un nuevo mecanismo de transmisión de los choques (utilización variable del capital). Este trabajo inicio una línea de investigación importante. Actualmente los modelos RBC usualmente consideran utilización variable del capital como un principal elemento del modelo.
Cooley y Hansen	1989	**Título:** *The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model.* **Tema:** modelo RBC con dinero. **Aporte:** se evalúa si el dinero (regla de oferta monetaria) afecta la naturaleza y amplitud de los ciclos económicos. Bajo los supuestos de la investigación, los autores encontraron que el dinero no aporta mayor explicación de los ciclos.
Mendoza	1991	**Título:** *Real Business Cycle in a Small Open Economy.* **Tema:** modelo RBC con economía abierta. **Aporte:** se evalúa si el modelo RBC podría explicar los hechos estilizados tipicos de una economía abierta. En particular el autor encuentra que la correlación positiva entre el ahorro y la inversión es explicada por la persistencia del choque de productividad. Cabe mencionar que se analizo el comportamiento de la economía ante dos choues: de productividad y de tasa de interés externa.
Benhabib et al	1991	**Título:** *Homework in Macroneconomics: Household Production and Aggregate Fluctuations.* **Tema:** modelo RBC con producción del hogar. **Aporte:** al introducir la producción del hogar y el trabajo utilizado en dicha producción en un modelo RBC, el modelo captura mejor los momentos empíricos de las variables macroeconómicas.
Christiano y Eichenbaum	1992	**Título:** *Current Real-Business Cycle Theories and Aggregate Labor-Market Fluctuations.* **Tema:** modelo RBC con consumo del gobierno. **Aporte:** fortalecieron el modelo RBC para que capture mejor la baja correlación entre las horas laborales y el salario real. Para ello los autores introducen el gasto público en el modelo RBC de Hansen (1985).

Cuadro 1.5: Desarrollo histórico de los modelos RBC (continuación)

Autor	Año	Descripción
Baxter y King	1993	**Título:** *Fiscal Policy in General Equilibrium.* **Tema:** modelo RBC con política fiscal. **Aporte:** evaluaron los efectos reales de corto y de largo plazo de la política fiscal en un modelo RBC. La principal diferencia es que en este modelo no se considera un choque de productividad sino que se considera un choque a la inversión pública y al gasto público.
Rotemberg y Woodford	1993	**Título:** *Dynamic General Equilibrium Models with Imperfectly Competitive Product Markets.* **Tema:** Modelo RBC con competencia imperfecta. **Aporte:** los autores consideraron una estructura de mercado de competencia monopolísitca en constraste con el supuesto de los modelos RBC estándar (competencia perfecta). Los autores analizan el rol que podría tener esta estructura en transmitir los choques y como fuente de fluctuaciones por medio de los choques de *mark-up*.
Cogley y Nason	1995	**Título:** *Output Dynamics in Real-Business-Cycle Models.* **Tema:** crítica al modelo RBC **Aporte:** los autores muestran que los modelos RBC tienen un mecanismo de transmisión interno débil que les impide capturar dos hechos estilizados del producto (autocorrelación y reversión a la tendencia). Aunque este problema se puede superar con algunos supuestos en el mercado de trabajo, aún dependen de choques transitorios grandes, lo cual es implausible en los datos.
Rotemberg y Woodford	1996	**Título:** *Real-Business-Cycle Models and Forecastable Movements in Output, Hours, and Consumption.* **Tema:** crítica al modelo RBC. **Aporte:** los autores hacen evidente la debilidad de los modelos RBC en capturar la varianza del producto y la correlación positiva entre el consumo, producto y trabajo mostrado en los datos.
Burnside y Eichenbaum	1996	**Título:** *Factor-Hoarding and the Propagation of Business-Cycle Shocks.* **Tema:** modelo RBC con utilización de la capacidad (capital y trabajo). **Aporte:** ante las criticas de Cogley y Nason (1996) y Rotemberg y Woodford (1996), estos autores proponen un menanismo de transmisión (utilización de la capacidad) que fortalece el mecanismo interno de los modelos RBC. Con ello el modelo modificado captura mejor lo observado en los datos sin necesidad de recurrir a grandes choques de productividad.

Investigaciones acerca del estado del arte de los modelos RBC

En este apartado se describe un conjunto de investigaciones que han tratado de resumir el estado del arte de los modelos RBC a lo largo del tiempo.

Los primeros investigadores que trataron de resumir el desarrollo de la Teoría RBC fueron King, Plosser y Rebelo, quienes en 1988 publicaron dos investigaciones en el *Journal of Monetary Economics*. La primera describía el marco téorico de los modelos RBC como también el método de solución de estos modelos. La segunda describía las principales líneas de investigación que se deprendían del modelo RBC estándar[8].

En su primera investigación, King, Plosser y Rebelo, consideraban que el marco teórico para estudiar los ciclos económicos reales es el modelo neoclásico de crecimiento aumentado por la elección de trabajo. Bajo este enfoque estudian los efectos sobre el ciclo económico de un choque de productividad. La principal conclusión que emerge de esta investigación es que el modelo neoclásico de crecimiento (aumentado con trabajo) tiene la capacidad de replicar algunos hechos estilizados de los ciclos económicos solo cuando existe un choque tecnológico altamente persistente. En particular son dos grupos de hechos estilizados los que captura el modelo: el primero es que el modelo muestra el comportamiento prociclico del empleo, consumo e inversión. El segundo es que el modelo genera el ranking observado de la volatilidad relativa de la inversión, producto y consumo ($var_{\text{inversión}} > var_{\text{producto}} > var_{\text{consumo}}$).

Sin embargo, el modelo es limitado en generar otros hechos estilizados. Uno de ellos, el cual es sumamente importante para caracterizar el ciclo económico, es la correlación serial del producto (autocorrelación de primer orden: 0.96 en los datos [1948.I-1986.IV]). El modelo requiere que exista una alta persistencia del choque para generar una fuerte correlación serial del producto (cuando la persistencia del choque es igual a 0.9 produce una autocorrelación de primer orden del producto de 0.93; sin embargo cuando el primero es igual a cero, entonces la autocorrelación es 0.03).

En su segunda investigación, King, Plosser y Rebelo, esbozan algunas nuevas direcciones de estudio dentro del marco teórico de los modelos RBC. Una de estas nuevas direcciones es considerar que la senda de crecimiento podría tener un componente estocástico; es decir, que podría tener una raíz unitaria. Esto difiere al análisis usual de los modelos RBC debido a que en estos modelos se considera que la senda de crecimiento es exógeno y determinístico. Una segunda línea de investigación es permitir que la tasa de crecimiento de largo plazo sea el resultado endógeno de la tecnología. Esto claramente contrasta con el supuesto usual en los modelos RBC estándar: la tasa de crecimiento de largo plazo es exógenamente determinada por la tasa de crecimiento del cambio técnico aumentador de trabajo, la cual se asume es un parámetro calibrado.

La tercera línea de investigación que mencionan estos autores es la inclusión de impuestos distorcionadores, competencia imperfecta y otros elementos que produzcan un equilibrio subóptimo. En este caso, los autores se centran en los métodos para incluir di-

[8] Estos autores publicaron un apéndice técnico después de varios años (2002) en la revista *Computational Economics*.

chos elementos en el modelo RBC. Finalmente, la cuarta línea de investigación se refiere la inclusión de agentes heterogéneos, lo cual constrasta con el supuesto de "agente representativo" en los modelos RBC. Esta línea de investigación responde a que la evidencia empírica sugiere que las familias son distintas por diferentes variables; es más, Heckman (1984) sugiere que lo más apropiado para estudiar el mercado de trabajo es el supuesto de heterogeneidad entre los agentes.

Stadler en 1994 publica una investigación que resume y evalúa la teoría de los Ciclos Económicos Reales. Una de sus principales conclusiones es que la Teoría RBC ha cambiado la forma de ver los ciclos económicos. Lo que esta teoría sugiere es que no se necesita distorciones para obtener fluctuaciones macroeconómicas; es decir, una economía eficiente y con mercados completos podrían mostrar fluctuaciones si el cambio tecnológico es estocástico. Esta afirmación abre toda una línea de investigación de los ciclos económicos. Otra conclusión es que aún existen algunos retos que la Teoría RBC no ha superado. Uno de ellos es la dificultad de que estos modelos capturen muy cercanamente los hechos estilizados. Otra dificultad radica en que no puede explicar satisfactoriamente la dinámica del producto, lo cual está asociada a otra debilidad: un mecanismo de transmisión débil. Rouwenhorst (1991) indica que las fluctuaciones producidas en el modelo de Kydland y Prescott (1982) se debe esencialmente al comportamiento estocástico de la productividad. El rol de mecanismo de transmisión del "tiempo para construir" el capital es pequeño, el cual se esperaba sea muy importante en trasladar el impulso inicial.

Una dificultad adicional es que el supuesto de un "agente representativo" es cuestionable debido a los datos microeconómicos. Tal como señala Stoker (1993), los datos a nivel microeconómicos sugieren la existencia de heterogeneidad entre las familias y las empresas. Por ejemplo, se puede encontrar diferencias entre el tamaño de las familas o de las empresas; asimismo, existen diferencias entre empresas de acuerdo a que tipo de factor son intensivos (algunos intensivos en capital y otros en trabajo). Finalmente, Stadler (1994) sugiere que, a pesar de los retos que enfrenta la Teoría RBC, su contribución de largo plazo radica en que ha propuesto nuevos métodos de investigación macroeconómica y de evaluación de políticas económicas.

En 1995, Thomas F. Cooley edita un libro en el cual congrega diferentes temas importantes de la escuela RBC. Tal como lo señala el autor, el objetivo de este libro es brindar una exposición organizada de las principales ideas y métodos de los modelos RBC. Los temas que aborda el libro son: una investigación orientada al crecimiento económico y ciclo económico, el cual brinda el punto de referencia en todo el libro; un conjunto de investigaciones que describen las extensiones del modelo RBC (agentes heterogéneos, dinero, producción doméstica, competencia imperfecta, precio de activos y economía abierta); dos investigaciones metodológicas, una de ellas orientada a la solución del modelo en un ambiente de equilibrio competitivo, y el otro orientada a la solución de economías subóptimas. Finalmente, el autor incluye una investigación sobre las economías no walrasianas y otra sobre análisis de políticas en los modelos RBC.

En el mismo espíritu que Cooley (1995); Hartley, Hoover y Salyer en 1998 presentan una colección de articulos que, a su juicio, definen y muestran el desarrollo de la escuela RBC por un lado; y por otro lado, manifiestan sus principales críticas. Tal como lo señala

los autores, el objetivo del libro es hacer un balance entre las investigaciones que están a favor de la escuela RBC y aquellas que la critica. Al comparar esta colección con el libro de Cooley (1995) se observa dos principales diferencias: la primera es que la colección de Hartley et al (1998) tiene una mayor extensión que la de Cooley (1995); tal es así, que Hartley et al (1998) considera 31 investigaciones, mientras que Cooley (1995) doce. La segunda diferencia importante es que Hartley et al (1998) efectivamente hace un balance de las investigaciones en el campo de los modelos RBC; es decir, entre sus 31 articulos, al menos once de ellos son criticas. Esto difiere de la obra de Cooley (1995) que no incluye ninguna crítica; esto se debe a que el objetivo de este autor fue mostrar las idea y metodos de la escuela RBC de una manera organizada.

Es importante subrayar que la obra de Hartley et al (1998) está organizada en cinco categorias: la primera contiene un conjunto de investigaciones sobre los fundamentos del modelamiento de los ciclos económicos reales. Por ejemplo en este primer conjunto de investigaciones se encuentra el articulo de Kydland y Prescott (1982), el cual inicio la escuela RBC. La segunda categoría contiene las principales extensiones de los modelos RBC. En este aspecto, la obra de Cooley (1995) es más exhaustiva en el sentido que contiene más extensiones; por ejemplo, en Cooley (1995) se puede encontrar el modelo RBC con economía abierta o con activos financieros, los cuales están ausentes en Hartley et al (1998). La tercera categoría contiene investigaciones que critican el método de calibración de los modelos RBC. La cuarta categoría hace referencia a las investigaciones sobre la forma de evaluar a los modelos RBC. Es preciso resaltar que esta categoría es la más extensa del libro, lo cual no es de extrañar por el debate que surgio a causa de la forma "no convencional" de evaluar los modelos RBC iniciada por Kydland y Prescott (1982): comparación entre los momentos teóricos (de la simulación del modelo) y los momentos empíricos, lo cual contrasta con la econometría usual. La quinta categoría se refiere al residuo de Solow y la última describe la forma de obtener el componente cíclico de las variables agregadas. La lectura de ambos libros provee un panorama completo de las fortalezas y debilidades de los modelos RBC.

En 1999, King y Rebelo escribieron un articulo en el *Handbook of Macroeconomics*[9], el cual titularon "*Resuscitating Real Business Cycles*". De este articulo se puede rescatar al menos tres ideas: la primera es que los autores reconocen la principal debilidad de los modelos RBC y sugieren una forma de superar esta debilidad. La segunda idea es que los autores demuestran que las principales críticas o problemas que enfrentaron los modelos RBC han podido ser resueltas exitosamente. Finalmente, los autores sugieren que existen nuevas líneas de investigación en los modelos RBC, los cuales indican que este programa de investigación aún está vigente.

Con respecto a la primera idea, los autores afirman que la principal debilidad de los modelos RBC es que estos modelos requieren choques tecnológicos grandes (desviación

[9]El objetivo del *Handbook of Macroeconomics*, tal como se señala en sus mismas páginas, es proveer una revisión de la literatura sobre el estado actual del conocimiento en macroeconomía. Los temas revisados incluyen la teoría del crecimiento económico y de los ciclos económicos, como también las consecuencias de la política fiscal y monetaria. Actualmente existen dos *handbooks*, el primero fue publicado en 1999 (editado por John B. Taylor y Michael Woodford) y el último en el 2016 (editado por John B. Taylor y Harald Uhlig).

estándar y persistencia significativa) para producir ciclos económicos cercanos a la realidad. Sin embargo, dichos choques tecnológicos no son tan grandes ni persistentes en los datos como el modelo lo requiere. Ante esta debilidad, los autores proponen considerar un mecanismo amplificador importante: la utilización variable del capital. Al introducir este componente en un modelo RBC, este modelo podría reproducir los ciclos económicos observados con un choque de productividad pequeño, tal como la evidencia empírica lo indica.

Con respecto a la segunda idea, los autores argumentan que existen tres críticas principales que han podido ser resueltas a favor de los modelos RBC. La primera crítica es la sensibilidad de los resultados del modelo a la parametrización. Tal como señalan los autores, el modelo RBC es resistente a los diferentes valores de los parámetros; por ejemplo, los resultados del modelo son satisfactorios inclusive en el caso de elasticidad de la oferta de trabajo pequeña a nivel individual (familia), pero a nivel agregado es muy grande. La segunda crítica es la limitación del modelo de producir un comportamiento realista de los precios. Esto ha sido superado al incluir variables nominales (oferta de dinero, precios, etc) en el modelo RBC; por ejemplo, esto se puede observar en Cooley y Hansen (1989). Finalmente, la tercera crítica es sobre el supuesto de choques tecnológicos grandes. Como se indico en el párrafo anterior, los autores reconocen esta debilidad, la cual puede ser superada cuando al modelo RBC estándar se le agrega la utilización variable del capital.

La tercera idea que se deprende de la investigación de King y Rebelo (1999) es que el programa de investigación de RBC está aún vigente debido a las nuevas líneas de investigación que han surgido. Por ejemplo, el estudio de un modelo multisectorial aún esta pendiente. La forma usual de estudiar los ciclos económicos en los modelos RBC ha sido bajo un modelo unisectorial; sin embargo, al considerar varios sectores se podría ganar mayor entendimiento de la relación entre dichos sectores y cómo la utilización variable del capital se comporta en cada sector. En este campo existe investigaciones previas tales como Long y Plosser (1983); no obstante, no ha sido totalmente explotado considerando la utilización variable del capital y choques tecnológicos más realistas. Otra línea de investigación es la consideración de agentes heterogéneos. En principio su introducción en el modelo RBC podría enriquecer la dinámica del mercado de trabajo, llevando a que el modelo se acerque más a la realidad.

En el 2005, Rebelo publica un articulo en el cual revisa brevemente la contribución de los modelos RBC en el entendimiento de los ciclos económicos, y describe *detalladamente* los principales temas abiertos en la literatura. Esta investigación complementa de manera importante el estudio de King y Rebelo (1999), al hacer énfasis en las líneas de investigación futuras.

Según Rebelo (2005), dos temas que aún requieren una mayor investigación, en el marco de los modelos RBC, son: por un lado, la explicación del comportamiento de los precios de los activos financieros; por otro lado, el entendimiento de la Gran Depresión. Con respecto al primero, el trabajo pionero de Mehra y Prescott (1985) demostró que el modelo RBC tenía la capacidad de capturar las características cualitativas de la prima por riesgo, pero fallaba en replicar sus características *cuantitativas*. A esta debilidad del modelo se le conoce como el “enigma de la prima por riesgo”. Estos hallazgos iniciaron una línea de investigación activa hasta el día de hoy. Una de la propuestas para superar

esta debilidad fue elaborada por Boldrin et al (2001), quienes introdujeron la formación de hábitos en un modelo RBC. El resultado de ello fue que el modelo aún mantenía la debilidad encontrada por Mehra y Prescott (1985). Otro esfuerzo en la misma dirección fue la de Boldrin et al (2001), quienes bajo el supuesto que la producción de bienes de consumo y de inversión se realiza en diferentes sectores, y que existe fricciones de movimiento de capital y trabajo entre sectores, obtuvieron resultados del comportamiento de la prima por riesgo más cercanos a lo observado en los datos. Sin embargo, esta línea de investigación demanda mayores estudios.

El segundo tema que demanda mayor investigación a la luz de los modelos RBC es la Gran Depresión. En particular, el reto que presenta los modelos RBC es explicar cuales fueron las causas de la Gran Depresión. Tal como señala Rebelo (2005), a la fecha existe un conjunto de investigaciones en este campo; sin embargo, aún es un tema abierto en la escuela RBC debido a que la Gran Depresión fue originada por la combinación de varios choques adversos y de políticas económicas inadecuadas.

Además de estos dos grandes temas de investigación, el autor menciona otras líneas de investigación abiertas: una de ellas es el estudio de choques alternativos al de productividad (choque de petroleo, choque fiscal y cambio tecnológico específico a la inversión). Otra línea es el modelo monetario; es decir, la extensión del modelo RBC para que contemple fricciones nominales y reales, los cuales en la práctica son modelo NEK. Además de lo anterior, Rebelo (2005) indica que la consideración de los modelos con equilibrios multiples bajo el espíritu de Farmer (1996) aún es un tema que requiere mayor estudio.

En el cuadro [1.6] se describe brevemente, desde un enfoque histórico, las investigaciones que han tratado de proveer el estado del arte de la escuela RBC a lo largo del tiempo.

Cuadro 1.6: Estado del arte

Autor	Año	Descripción
King et al	1988a	**Título:** *Production, Growth and Business Cycles - I. The Basic Neoclassical Model.* **Tema:** marco teórico y métodos de solución de los modelos RBC. **Aporte:** por un lado sustentan que el modelo de crecimiento neoclásico extendido (incorpora endógenamente la decisión consumo-inversión y la decisión ocio-trabajo) tiene la capacidad de replicar las características de algunas variables agregadas. Por otro lado manifiestan que las conclusiones del modelo requieren que los choques de productividad sean persistentes.
King et al	1988b	**Título:** *Production, Growth and Business Cycles - II. New Directions.* **Tema:** Nuevas líneas de investigación en los modelos RBC. **Aporte:** enumeran y explican las líneas de investigación pendientes en los modelos.
Stadler	1994	**Título:** *Real Business Cycles.* **Tema:** resume y evalúa la teoría RBC. **Aporte:** desribe el modelo RBC estándar, luego menciona las principales extensiones y finalmente menciona las críticas.
Cooley	1995	**Título:** *Frontiers of Business Cycle Research.* **Tema:** desarrollo de los modelos RBC. **Aporte:** muestra de manera organizada el desarrollo de las principales ideas y métodos de los modelos RBC. El libro es un compendio de investigaciones en el marco de la teoría RBC.
Hartley et al	1998	**Título:** *Real Business Cycles - A Reader.* **Tema:** balance entre las investigaciones que soportan los modelos RBC y aquellas que la critican. **Aporte:** congrega 31 articulos, los cuales no solo muestra el desarrollo de la escuela RBC sino también sus principales debilidades y las investigaciones que lo sustentan.
King y Rebelo	1999	**Título:** *Resuscitating Real Business Cycles.* **Tema:** modelo RBC con *modificaciones* que supera las críticas iniciales y las futuras líneas de investigación. **Aporte:** al menos tres ideas se rescatan. La primera es que la inclusión de la utilización variable del capital ayuda a obtener un mejor desempeño del modelo con un choque de productividad más realista. La segunda es que los modelos RBC han superado tres críticas importantes; y la última idea es que aún existen líneas de investigación en los modelos RBC.
Rebelo	2005	**Título:** *Real Business Cycle Models: Past, Present, and Future.* **Tema:** énfasis en las líneas de investigación pendientes en los modelos RBC . **Aporte:** revisa brevemente la contribución de los modelos RBC y explica detalladamente las líneas de investigación pendientes.

Investigaciones asociadas al mercado de trabajo

Kydland (1995) afirma que el comportamiento del mercado de trabajo tiene un rol importante para entender los ciclos económicos. Es por ello que uno de los principales aspectos en la evaluación de los modelos RBC es su capacidad de replicar los hechos estilizados del mercado laboral. En particular, la economía norteamericana muestra dos hechos estilizados de importancia: el primero es que las horas trabajadas es más volátil que el salario real; el segundo es que la correlación entre las horas trabajadas y el salario real es cercana a cero. Además, los estudios microeconométricos sugieren que la elasticidad de la oferta de trabajo es pequeña. A continuación se describe las principales investigaciones que han tratado de capturar estos hechos estilizados.

Una de las principales críticas al modelo de Kydland y Prescott (1982) fue el supuesto que la elasticidad de la oferta de trabajo es significativa, lo cual no es respaldado por los datos. En su investigación, Kydland y Prescott (1982) se concentraron en el componente *intensive margin* de la oferta de trabajo, el cual es medido como el número promedio de horas trabajadas. Estos autores asumieron que el movimiento de las "horas de trabajo agregada" es esencialmente por el ajuste de horas trabajadas que realiza el empleado. Sin embargo, Hansen (1985) considera que la variación de horas de trabajo agregada es debido principalmente a la entrada y salida de los individuos en el mercado de trabajo; es decir, el componente *extensive margin* de la oferta de trabajo. Bajo este supuesto, Hansen (1985) logra obtener una elasticidad de oferta de trabajo más acorde con los datos microeconómicos.

Christiano y Eichenbaum (1992) indican que el modelo de Kydland y Prescott (1982) y el de Hansen (1985) fallan en replicar los dos principales hechos estilizados del mercado de trabajo: [1] las horas trabajadas es más volátil que el salario real, y [2] la correlación entre las horas trabajadas y el salario real es cercana a cero. Ante ello, Christiano y Eichenbaum (1992) proponen un modelo en el que el gasto público tiene un rol importante en el consumo privado. Bajo el supuesto que el consumo público es un sustituto imperfecto del consumo privado, estos autores indican que un incremento del gasto del gobierno produce un efecto riqueza negativo, lo cual induce a las familias a reducir su demanda de ocio y por tanto a incrementar su oferta de trabajo. Con esta especificación, los autores encuentran que el modelo se acerca mejor a los datos.

Otro esfuerzo en mejorar el desempeño cuantitativo del modelo RBC en el mercado laboral fue realizado por Benhabib et al (1991). Estos autores propusieron incluir en la modelación la producción del sector que trabaja en el hogar (no mercado) debido a su alta participación en el producto nacional (20 % a 50 %) según Eisner (1988). La idea principal de este modelo es que los agentes también obtiene utilidad cuando consumen lo producido por este sector y los que trabajan en este sector obtienen desutilidad tal como se observa en el mercado. Bajo esta premisa los autores encuentran que existen incentivos para que un individuo se traslade del trabajo en el hogar (no mercado) al trabajo en el mercado. El efecto de ello es que la oferta de trabajo podría incrementarse de manera similar al choque de gasto público de Christiano y Eichenbaum (1992). Con esta especificación, los autores encuentran que el modelo se acerca mejor a los datos.

Investigaciones asociadas a la política fiscal

En este apartado se describe dos conjuntos de investigaciones. El primer conjunto, desde el punto de vista empírico, ha puntualizado la relación que existe entre las variables fiscales (impuestos, gasto y déficit) y las variables macroeconómicas (producto, consumo, inversión, empleo y salario real). El segundo, desde un punto de vista teórico, ha planteado diversos modelos RBC con un sector público. El objetivo de ello es evaluar la capacidad de estos modelos en capturar la evidencia empírica. De todos estos esfuerzos se concluye, tal como lo señala Cooper (1998), que *no* existe un rol para la política fiscal en el modelo RBC estándar, el cual considera mercados completos y ausencia de externalidades. Es decir, para que el sector fiscal gane un rol importante en el modelamiento, es necesario considerar algunos *supuestos distintos* a los propuestos por la escuela RBC.

[A] Evidencia empírica: en la literatura se puede distinguir al menos dos conjuntos de investigaciones empíricas. El primer conjunto relaciona el choque de gasto público como consecuencia de eventos militares en lugar de eventos macroeconómicos (Hall, 1980, 1986; Barro, 1982; Rotemberg y Woodford, 1992; Ramey y Shapiro, 1998), la cual usualmente utiliza modelos de regresión lineal o el enfoque "narrativo"[10] para identificar el choque de gasto fiscal. El segundo conjunto hace énfasis en que el gasto público responde a eventos macroeconómicos y utiliza el enfoque de Vectores Autoregresivos Estructurales (SVAR)[11] para identificar el choque fiscal. En este apartado nos centraremos en este último conjunto de investigaciones.

Bajo el enfoque VAR diversos estudios han encontrado que el choque de política fiscal (definido como compras del gobierno) tiene efectos positivos sobre el producto, horas trabajadas, consumo y salario real (Fatás y Mihov, 2001; Blanchard y Perotti, 2002; Perotti, 2005; Gali et al, 2007 y Pappa, 2009). Mountford y Uhlig (2009) encuentra que un choque de gasto público anticipado si bien tiene efectos positivos sobre el producto y el consumo, estos son pequeños.

[10]El enfoque narrativo consiste en revisar diversas fuentes históricas tales como el discurso presidencial, el reporte económico del presidente y los reportes de las reuniones del congreso para identificar la motivación de cada cambio de impuesto/gasto público legislado. La idea de este método es separar los cambios en las variables fiscales legisladas en aquellos que responden legitimamente a cambios en variables macroeconómicas de aquellos que responden a otras motivaciones (por ejemplo: motivaciones políticas). Para una mejor descripción de este método revisar Romer y Romer (2010).

[11]Los modelos VAR (o SVAR) se han convertido en una de las herramientas econométricas más utilizadas en macroeconometría. Esto se debe a que esta técnica puede describir las relaciones de forma reducida entre las variables agregadas sin imponer a priori la teoría económica. Sin embargo, cuando se desea analizar las relaciones económicas *estructurales* entre las variables se necesita alguna forma de identificación, las cuales usualmente están basadas en la teoría económica. Chudik y Fidora (2011) señalan que en la literatura existen al menos cuatro enfoques para imponer *restricciones de identificación* del choque: el primero es colocar de manera recursiva las variables (descomposición de Cholesky); el segundo es imponer restricciones "cero" en el sistema de ecuaciones lineales. Estas restricciones son un conjunto de variables que no son afectadas por el choque de interés durante cierto periodo de tiempo. El tercer enfoque es la descomposición en componentes permanentes y temporales. La cuarta forma de imponer restricciones de identificación son las restricciones de signo. Esta alternativa consiste en indicar el signo que debe de tener la función impulso-respuesta estructural para un número de periodos después del choque. Como indica Chudik y Fidora (2011), la idea básica detrás de este método es poder identificar el choque estructural al revisar si el signo correspondiente de su función impulso-respuesta está acorde con la teoría económica.

Fatás y Mihov (2001), basado en la investigación de Blanchard y Perotti (1999)[12], estudiaron el efecto del choque de gasto público sobre el consumo, la inversión y el empleo. En su modelo VAR inicial encontraron que el choque positivo de gasto público incrementa el PBI real. En un segundo modelo, en el que incluyeron los componentes del consumo (consumo total, consumo de bienes durables, consumo de bienes no durables y consumo de servicios) observaron que el consumo total y en todos sus componentes reaccionan positivamente al choque de gasto público. Esto sugiere que el consumo es procíclico. Al realizar el mismo ejercicio con la inversión y sus componentes, los autores concluyen que la inversión total se contrae ligeramente en los primeros seis trimestres para luego reaccionar positivamente ante el choque hasta volver a la tendencia luego de tres años. Además, se observa que el motor del comportamiento de la inversión es la inversión residencial, la cual siempre se mantiene por encima de la tendencia hasta el tercer año. De estos ejercicios los autores infieren que el consumo y la inversión reaccionan positivamente frente un choque de gasto público.

Al evaluar los impactos de choque fiscal sobre las variables de mercado de trabajo, los autores concluyen que el empleo se incrementa después del choque, pero que el salario real cambia marginalmente. Ante este último resultado, los autores indican que la reacción de salario real de la economía no es lo suficientemente robusta ante diferentes especificaciones de salario nominal y de los métodos de deflación (Burnside et al, 2000), por lo cual prefieren analizar la respuesta del salario real del sector manufactura, la cual si es robusta. Bajo este cambio de variable, los autores encuentran que el salario real (del sector manufactura) responde positivamente (y significativamente) ante el choque de gasto público.

Fatás y Mihov (2001), en un paso adicional, contrastan sus resultados empíricos con el modelo RBC. El objetivo de este constraste es evaluar si el modelo RBC con un sector gobierno tiene la capacidad de capturar el comportamiento empírico del consumo y del empleo frente un choque de gasto público. Lo que encuentran estos autores es que el modelo no es capaz de replicar el comportamiento procíclico del consumo; es más, el modelo RBC predice que el consumo debe de contraerse.

Blanchard y Perotti (2002) analizaron el efecto de un choque de gasto público y de impuestos sobre el producto. La principal conclusión de este estudio es que el producto se incrementa ante un choque positivo de gasto público y se reduce ante un incremento de los impuestos. Este resultado es consistente con lo sugerido por los modelos RBC que introducen el gasto público como un choque. En un nivel más de análisis, los autores evalúan el impacto de los choques fiscales sobre los componentes del PBI. Los resultados indican que el consumo privado reacciona positivamente frente al choque de gasto público y que la inversión se contrae; es decir, encuentran que el consumo es procíclico. Al observar los resultados de los modelos RBC que incluyen política fiscal se encuentra que no son consistentes con el comportamiento observado del consumo pero que sí captura la reducción de la inversión.

Es preciso mencionar que la investigación de Fatás y Mihov (2001) y de Blanchard y Perotti (2002) tienen algunas similitudes, pero también algunas diferencias. En primer

[12]Cabe mencionar que esta investigación fue publicada luego en el 2002 en *"The Quarterly Journal of Economics"*, la cual se describe en el párrafo siguiente.

lugar, en ambos estudios el choque fiscal genera una respuesta positiva del producto con un multiplicador fiscal mayor a uno en Fatás y Mihov (2001) y muy cercano a uno en Blanchard y Perotti (2002). En segundo lugar, ambas investigaciones encuentran que el consumo se incrementa significativamente ante el choque fiscal. En tercer lugar, existe un diferencia importante en cuanto al comportamiento de la inversión. Fatás y Mihov (2001) indican que el choque de gasto público genera una respuesta positiva marginal de la inversión, mientras que Blanchard y Perotti (2002) encuentran que dicha respuesta es negativa y significativa.

Galí et al (2007) confirman la evidencia previa sobre los efectos macroeconómicos del choque de gasto público. En particular encuentran resultados similares para el producto y el consumo. Para el caso de la inversión, sus resultados están en línea con lo encontrado *cualitativamente* por Blanchard y Perotti (2002) (reducción de la inversión) pero cuantitativamente dicha respuesta es insignificante. Además, encuentran que el salario real y el número de horas trabajadas se incrementan persistentemente ante el choque fiscal.

Ante esta evidencia, los autores sugieren un modelo NEK que considere un componente heterogéneo en las familias. El supuesto principal es que en la economía subsisten dos tipos de familias: las ricardianas y las no ricardianas. El primer tipo de familia tiene un comportamiento estándar en los modelos macroeconómicos (optimización intertemporal); el segundo tipo de familia solo consume su ingreso laboral y no puede trasladar recursos intertemporalmente. Bajo este supuesto y los correspondientes a los modelos NEK (competencia monopolistica y rigidez de precios), el modelo genera un incremento del consumo como respuesta al choque de gasto público.

Las investigaciones mencionadas han hecho énfasis en las restricciones *estándar* de identificación de los choques, tales como descomposición de Cholesky o restricciones "cero". A diferencia de estas investigaciones, Mountford y Uhlig (2009) estudiaron los efectos de los choques de política fiscal desde una óptica distinta. Lo novedoso de esta investigación es la utilización de "las retricciones de signo" en un modelo VAR para identificar los choques de política fiscal. Tal como señalan estos autores, la identificación de estos choques es difícil debido a tres factores. En primer lugar, existe dificultad en discernir si el movimiento de las variables fiscales se debe al choque de política fiscal o simplemente a la respuesta a otros choques como monetario o de productividad. La segunda es que no está claro qué es lo que se entiende por choque fiscal, la cual puede ser un incremento (esperado o no esperado) de gasto público, un recorte de impuestos, entre otras variables. Esto hace contraste con el choque de política monetaria, el cual claramente se entiende como el aumento no esperado de la tasa de interés. El tercer factor es que se debe de tomar en cuenta el anuncio y la implementación de la política fiscal. Esto es importante porque el anuncio puede causar movimientos en las variables macroeconómicas sin necesidad que las variables fiscales muestren algún movimiento previo.

Una de los principales conclusiones de este estudio es que un choque de gasto público anticipado[13] tiene un efecto positivo débil sobre el producto, la tasa de interés y el consumo; es decir, el consumo es procíclico. Además, los efectos de este choque son más fuertes

[13] Se asume que el anuncio del choque fiscal se realiza hoy pero su implementación es dentro de un año.

que el choque de gasto público *no* anticipado. En térmimos generales, estos resultados están en línea con las investigaciones empíricas previas.

Bajo la misma técnica econométrica (SVAR con restricciones de signo), Pappa (2009) se enfocó en estudiar los efectos del choque fiscal en el mercado de trabajo. Lo novedoso de este estudio es que el autor utilizó los resultados de los modelos DSGE con choque fiscal, para luego utilizar los "signos" predichos como restricciones en la identificación de los choques fiscales en un modelo SVAR. En particular, el autor propone un modelo RBC con sector fiscal en línea con Finn (1998) y un modelo NEK altenativo para encontrar el efecto del choque fiscal sobre las variables macroeconómicas. El resultado de ello es que, en ambos modelos, el producto y el déficit fiscal se incrementa ante un choque positivo de consumo público. Este resultado es utilizado por el autor para identificar el choque fiscal en su modelo SVAR. El resultado empírico de este modelo econométrico es que el salario real y el empleo responden positivamente (y significativamente) ante un choque de consumo público. Una conclusión que se desprende de esta investigación es que la evidencia empírica sobre la respuesta (positiva) del salario real no es capturada por el modelo RBC (el cual predice una reducción del salario real), pero sí por el modelo NEK.

[B] Modelos teóricos: Ramey (2016) sugiere que la literatura sobre el gasto público usualmente ha buscado responder dos principales preguntas: [1] ¿Los modelos DSGE teóricos (RBC y NEK) capturan los hechos estilizados de la política fiscal? [2] ¿Cuáles son los multiplicadores fiscales? En esta sección nos vamos a detener en la primera pregunta y en especial en cómo los modelos RBC han tratado de capturar la evidencia empírica de las variables fiscales[14].

Antes de describir algunos modelos RBC que incluyen sector gobierno es importante mencionar que usualmente las variables que describen el gasto público han sido introducidas en los modelos RBC como choques. Esto se debe a que la pregunta que se ha buscado responder en estas investigaciones es acerca de cuáles son los impactos del gasto de gobierno sobre la volatilidad del producto. Bajo esta premisa, el gasto de gobierno ha sido modelado como un proceso estocástico exógeno, usualmente AR(1), como el choque de productividad. Es en este escenario donde los modelos RBC han servido de marco teórico para evaluar distintas políticas fiscales (gasto de gobierno); sin embargo, tal como lo señala Stadler (1994), dado los supuestos de los modelos RBC (agente representativo y ausencia de fricciones nominales y reales), ha sido difícil para estos modelos colocarse como un "marco conceptualmente completo" para el análisis de políticas fiscales.

Además de lo anterior, King y Rebelo (2000) indican que otra desventaja de considerar al gasto público como un choque en los modelos RBC es que el modelo no puede replicar los comovimientos de las variables macroeconómicas. Por ejemplo, cuando se considera que el único choque del modelo es el gasto público, financiado por impuestos de suma alzada, se obtiene que el consumo es contracíclico, lo cual es inconsistente con los datos. Esto se debe a que el efecto riqueza negativo, que produce el gasto público, induce a la familia a reducir su consumo pero la incentiva a incrementar las horas trabajadas y por tanto el producto agregado. Es decir, un incremento del gasto público financiado con impuestos de

[14]Para ver en detalle una revisión de literatura sobre los multiplicadores fiscales se puede revisar Ramey (2011b, 2016).

suma alzada (en el periodo actual o en el futuro) reduce la riqueza de las familias debido al incremento actual (o esperado) de los impuestos, lo cual finalmente incentiva a las familias a reducir su consumo.

Hall (1980) y Barro (1981,1987) analizaron el impacto que tiene el consumo del gobierno sobre el producto, el empleo y la tasa de interés real. En ambos casos los autores utilizaron el modelo de crecimiento neoclásico estándar. De estos estudios se observan cuatro conclusiones: la primera es que un incremento temporal o persistente del consumo público debería de aumentar el producto y las horas trabajadas. La segunda es que Hall (1980) sugiere que los efectos sobre el empleo y el producto de un incremento temporal del consumo público son mayores cuando este es temporal en comparación con uno permanente. La tercera conclusión es que el multiplicador fiscal (del consumo público) es menor a uno (en estado estacionario); es decir, $\Delta Y/\Delta G < 1$. La cuarta conclusión es que la tasa de interés reacciona diferente dependiendo si el cambio de consumo público es temporal o permanente. En el primer caso (cambio temporal), la tasa de interés responde positivamente, mientras que en el segundo caso (permanente) practicamente no cambia (Barro, 1981,1987).

Estos hallazgos fueron contrastados por Aiyagari et al (1992), quienes utilizaron un modelo crecimiento neoclásico estándar *modificado* que incluía una oferta de trabajo variable y un sector gobierno; es decir, un modelo RBC con sector público. Además, los autores consideraron dos principales supuestos: el primero es que el consumo del gobierno es financiado por impuestos de suma alzada, y el segundo es que la función de utilidad es aditivamente separable en el consumo público y privado. Bajo todos estos supuestos, el modelo brinda cuatro conclusiones. La primera es que, de manera similar a Hall (1980) y Barro (1981,1987), el producto y el empleo responden positivamente al incremento del consumo público. La segunda es que un cambio persistente del consumo público tiene efectos *más fuertes* sobre el empleo y el producto que un cambio temporal. Esto claramente contradice lo sugerido por Hall (1980).

La tercera conclusión es que el multiplicador fiscal (del consumo público) es *mayor a uno* (en estado estacionario) si el cambio del consumo público es permanente; es decir, $\Delta Y/\Delta G > 1$ (si ΔG es permanente). La cuarta conclusión es que la tasa de interés reacciona positivamente independientemente de la persistencia del cambio del consumo público. Sin embargo, la persistencia de este último determina la magnitud de la respuesta de la tasa de interés: a mayor persistencia, mayor es la respuesta de la tasa de interés.

Baxter y King (1993) abordan tres preguntas relevantes en política fiscal: ¿Cuáles son los efectos macroeconómicos de las compras temporales/permanentes del gobierno? ¿Cómo cambia los efectos de las compras del gobierno bajo distintas decisiones de financiamiento? y ¿Cuáles son los efectos macroeconómicos si las compras del gobierno incrementa el stock de capital público? Para responder estas preguntas, los autores introducen variables fiscales en las familias y en las empresas en el marco teórico de un modelo RBC estándar. En el caso de las familias, se asume que el gasto del gobierno y el stock de capital público brindan utilidad, pero no afectan la utilidad marginal. De otro lado, en el caso de las empresas se asume que el stock de capital público es un factor de producción y que sí afecta la productividad de los factores de producción (stock de capital privado y trabajo).

Asimismo, se considera que al igual que el stock de capital privado, el capital público sigue una ley de movimiento de acumulación del capital. Esta ley considera la misma tasa de depreciación del capital privado y la forma de incrementar capital público es por medio de la inversión del gobierno.

Los principales resultados del modelo se pueden resumir en tres grupos. El primero contiene los impactos del incremento en las compras del gobierno. En este caso, el modelo predice que el producto responde positivamente ante un choque temporal o permanente de compras del gobierno. En constraste, el consumo en ambos escenarios se contrae, lo cual resulta en una correlación negativa entre el PBI y el consumo. Este resultado no se ajusta a lo observado en los datos. De otro lado, el salario real se contrae y el trabajo se incrementa independientemente de la persistencia del choque fiscal (temporal o permanente). La contracción del salario real difiere claramente con la evidencia empírica.

El segundo grupo de resultados es sobre cómo la decisión o la forma de financiamiento del gobierno podría cambiar los impactos del choque fiscal. Al comparar dos alternativas de financiación (impuestos de suma alzada vs impuestos distorcionadores) se observa que el modelo predice una reducción del producto cuando los impuestos son proporcionales (distorcionadores). Es más, el impacto negativo no solo se observa en el producto sino también en el consumo, inversión y en el trabajo. Por tanto, los autores concluyen que la forma de financiamiento sí influye sobre los impactos del choque fiscal.

El tercer grupo de resultados es sobre los efectos del choque de capital público. El modelo sugiere que el producto y el trabajo responden positivamente, mientras que el consumo se contrae los primeros seis años para luego mostrar una respuesta positiva los periodos restantes hasta volver al estado estacionario.

Ludvigson (1996) estudia los efectos macroeconómicos de la deuda del gobierno. El análisis usual del impacto del choque fiscal es que el incremento actual del gasto público (compras del estado) será financiado por medio de impuestos de suma alzada en el futuro. Este incremento esperado de los impuestos tienen un efecto riqueza negativo hoy, induciendo a las familias a reducir su consumo y ahorro (= inversión, en economía cerrada). Sin embargo, Ludvigson (1996) sugiere que si la reducción de impuestos distorcionadores (choque fiscal positivo) es financiado por emisión de deuda pública, entonces dicho choque fiscal podría inducir un incremento del consumo y de la inversión. La racionalidad detrás de este resultado consiste en que las familias observan una reducción actual de los impuestos, pero esperan que se incremente en el futuro para pagar la deuda pública de hoy. Este incremento esperado de la tasa de impuestos reduce la tasa de interés futura. Esto se debe a que la tasa impositiva afecta la demanda de capital (por se proporcional al ingreso). Ante esta reducción de tasa de interés, las familias aumentan su consumo/inversión hoy por el efecto sustitución, la cual refuerza el incremento inicial por la reducción de impuestos hoy.

Además, Ludvigson (1996) señala que este efecto sobre el consumo y la inversión depende de la elasticidad de la oferta de trabajo y el grado de persistencia de la deuda pública. Tal es así que a medida que la oferta de trabajo tiende a ser más elastica y la deuda pública tiende a ser más persistente, la respuesta del consumo ante la emisión de deuda se fortalece.

Finn (1998), a diferencia de las investigaciones previas, separa el gasto público en dos componentes: compra de bienes finales y la compensación laboral (del sector público). Las investigaciones previas han centrado su análisis en el primer componente; sin embargo, la compensación laboral tiene una participación relevante en el gasto público (59 % en promedio entre 1950.1 y 1993.4). Además, como señana Finn (1998), teoricamente el choque a la compra de bienes del sector público tiene efectos distintos sobre el ciclo económico que el choque a la compensación laboral pública. Bajo estas premisas, el autor desarrolla un modelo RBC, del cual emerge un resultado principal: el gasto de gobierno no es un fuente importante de las fluctuaciones económicas. Esto se observa cuando se evalúa el modelo solo con un choque de productividad en comparación con el modelo que, además del choque de productividad, contiene el choque fiscal. En particular, la simulación indica que el choque fiscal agrega 0.02 % a la desviación estándar el producto.

Fatás y Mihov (2001) utiliza un modelo RBC con sector gobierno similar al de Ludvingson (1996). El objetivo de estos autores es evaluar si el modelo RBC bajo diferentes escenarios fiscales podría capturar la correlación positiva entre el PBI y el consumo ante la presencia de un choque de gasto público, según sugiere la evidencia empírica. Para ello los autores evalúan al modelo en cuatro escenarios: [1] incremento del gasto público financiado por impuestos (de suma alzada), [2] incremento del gasto público financiado por impuestos (distorcionadores), [3] reducción del impuesto (distoricionador) financiado por deuda, y [4] incremento del gasto público financiado por deuda.

Bajo estos escenario, al menos dos resultados son importantes de mencionar: el primero es que en los cuatro escenarios fiscales el consumo se contrae, esto revela la dificultad del modelo en capturar el comportamiento observado del consumo ante un choque fiscal. El segundo resultado es que el producto se incrementa en todos los casos excepto cuando el gasto público es financiado por impuestos distorcionadores, lo cual captura en cierto grado lo sugerido por la evidencia empírica.

En el cuadro [1.7] se describe cronológicamente algunas investigaciones acerca de la evidencia empírica de las variables fiscales y sus efectos sobre las variables macroeconómicas. Asimismo, el cuadro [1.8] muestra la evolución de los diferentes modelos RBC que han incluido el sector gobierno para tratar de capturar la evidencia empírica mencionado en el cuadro [1.7].

Cuadro 1.7: Modelos RBC con variables fiscales

Autor	Año	Descripción
		Investigaciones empíricas
Fatás y Mihov	2001	**Título:** *The Effects of Fiscal Policy on Consumption and Employment: Theory and Evidence.* **Tema:** estudian el efecto del choque de gasto público sobre el consumo, la inversión y el empleo. **Aporte:** encuentran que ante un choque de gasto público, el empleo, el salario real (del sector manufactura), el producto y los componentes del consumo (bienes durables, no durables y servicios) responden positivamente. La respuesta de la inversión en el corto plazo es negativa pero se expande en el mediano plazo.
Blanchard y Perotti	2002	**Título:** *An Empirical Characterization of the Dynamic Effects of Changes in Government Spending and Taxes on Output.* **Tema:** analizan el efecto del choque del gasto público y de impuestos sobre el producto. **Aporte:** encuentran que ante un choque de gasto público positivo (o choque de impuestos negativo) el PBI se incrementa. Además, bajo un choque de gasto público el consumo se incrementa y la inversión se contrae (marginalmente).
Galí et al	2007	**Título:** *Understanding the Effects of Government Spending on Consumption.* **Tema:** analizan el efecto del choque del gasto público sobre las variables macroeconómicas y proponen un modelo NEK que captura la evidencia empírica. **Aporte:** encuentran que el consumo y el producto se incrementan ante un choque de gasto público. En contraste, la inversión se contrae (significativamente). Además, proponen un modelo NEK con familias ricardianas y no ricardianas que permite capturar los efectos empíricos del choque de gasto público.
Pappa	2009	**Título:** *The Effects of Fiscal Shocks on Employment and the Real Wage.* **Tema:** análisis del impacto del gasto público sobre el empleo y salario. **Aporte:** utiliza los modelos DSGE (RBC y NEK) para determinar restricciones de signo, las cuales utiliza en un modelo SVAR. Baja este último modelo obtiene que el salario real y el empleo se incrementan ante el aumento de consumo público. El modelo RBC propuesto falla en capturar esta evidencia empírica, mientras el modelo NEK tiene éxito.

Cuadro 1.8: Modelos RBC con variables fiscales (continuación)

Autor	Año	Descripción
		Investigaciones teóricas
Aiyagari et al	1992	**Título:** *The Output, Employment, and Interes Rate Effects of Government Consumption.* **Tema:** analizan los efectos del consumo temporal/permanente del gobierno bajo un modelo RBC. **Aporte:** pioneros en utilizar un modelo RBC para analizar los efectos del consumo del gobierno. Estudios previos utilizaban el modelo de crecimiento estándar (sin extensiones). El modelo captura la respuesta positiva del PBI ante el choque fiscal (independientemente de la persistencia del choque). Además, la tasa de interés se incrementa.
Baxter y King	1993	**Título:** *Fiscal Policy in General Equilibrium.* **Tema:** evalúa los efectos macroeconómicos del gasto fiscal, del tipo de financiamiento y de inversión pública en un modelo RBC. **Aporte:** el modelo no lográ capturar el incremento observado del consumo y sugiere que el tipo de financiamiento si afecta la respuesta del producto. Además indica que un choque de capital público incrementa el producto y el empleo.
Ludvigson	1996	**Título:** *The Macoeconomic Effects of Government Debt in Stochastic Growth Model.* **Tema:** estudia los efectos macroeconómicos de la deuda pública en un modelo RBC. **Aporte:** analiza los efectos de un choque fiscal positivo (reducción de impuestos distorcionadores) financiado por deuda. Esto es distinto a la forma estándar de analizar el choque fiscal ($\uparrow$ gasto público financiado por impuestos de suma alzada). En este escenario, el modelo predice un incremento del producto y consumo, lo cual es consistente con los datos.
Finn	1998	**Título:** *Cyclical Effects of Government's Employment and Goods Purchases.* **Tema:** bajo un modelo RBC estudia si el choque de gasto público ayuda a explicar el ciclo económico. **Aporte:** diferencia dos componentes del gasto público (consumo vs compensaciones). Los modelos usuales han estudiado el primer componente dejando de lado el segundo. Bajo un modelo RBC que considera los dos componentes se concluye que el choque de gasto público no ayuda a explicar los ciclos económicos.
Fatás y Mihov	2001	**Título:** *The Effects of Fiscal Policy on Consumption and Employment: Theory and Evidence.* **Tema:** estudia cuatro escenarios fiscales en un modelo RBC. **Aporte:** la principal conclusión es que en los cuatro escenarios fiscales el consumo se contrae en contraste por lo predicho por los datos.

Investigaciones asociadas al dinero

En este apartado se describe dos conjuntos de investigaciones. El primer conjunto se refiere a la investigaciones empíricas, las cuales sugieren que el choque de política monetaria tiene efectos sobre el producto y el precio. El segundo conjunto resume los diferentes modelos RBC que han tratado de capturar este comportamiento observado en los datos. Una conclusión que desprende de todas estas investigaciones es que el modelo RBC necesita otros supuestos como fricciones nominales y reales para poder capturar los efectos del choque monetario sobre las variables reales.

[A] **Evidencia empírica:** en la literatura existe un conjunto vasto de investigaciones que sugieren que el choque monetario (o choque de política monetaria) tiene efectos sobre el producto y el precio (Friedman y Schwartz, 1963; Romer y Romer, 1989; Bernanke y Blinder, 1992; Shapiro, 1994; Leeper, 1997; Christiano et al, 1999; Faust et al, 2004; Bernanke et al, 2005; Smets-Wouters, 2007; Coibion, 2012; Amir Ahmadi y Uhlig, 2015). Por lo general, es un consenso en la literatura empírica que un choque de política monetaria contractivo (reducción de la tasa de crecimiento de la oferta del dinero) tiene efectos negativos (importantes) sobre el producto. En el caso de la respuesta del precio, la literatura no es concluyente. Lo que se espera es que ante un choque de política monetaria contractivo el precio se reduzca (debido a un reducción de la demanda); sin embargo, lo que se observa, en algunas especificaciones[15], es que en el corto plazo el precio se incrementa. A este hecho empírico Eichenbaum (1992) lo denominó "el enigma del precio" (*Price Puzzle*).

De otro lado, Christiano y Eichenbaum (1992b, 1992d) indican que un choque monetario positivo (incremento de la tasa de crecimiento de la oferta de dinero) reduce la tasa de interés, pero aumenta el producto, el empleo y el salario real.

Además de lo anterior, Christiano et al (1999) subrayan dos temas importantes: el primero se refiere a la *identificación* del choque de política monetaria, y el segundo a la *evaluación del modelo* que busca capturar la evidencia empírica.

Con respecto al primero es importante diferenciar dos componentes de las *acciones de política monetaria*: el primer componente es la respuesta a comportamientos no monetarios en la economía, y el segundo es el choque monetario propiamente dicho. Esta separación es importante porque antes de construir algún modelo DSGE (con dinero) es necesario saber cómo reacciona la economía después de un choque monetario. Para identificar el choque monetario, la literatura sugiere tres estratégias. La primera es asumir que la autoridad monetaria responde al estado de la economía por medio de una *regla de retroalimentación*, y todos aquellos movimientos de política monetaria que no se desprenden de esta regla son catalogados como *choque monetario*. Los modelos RBC con sector monetario usualmente siguen esta forma de identificar el choque monetario. La segunda estratégia es buscar en los datos algún signo de política monetaria exógena. La tercera es identificar el choque de política monetaria por medio del supuesto de que este choque no afecta la actividad económica en el largo plazo.

[15]Por ejemplo, Christiano et al (1999) bajo su especificación econométrica (SVAR) encuentran el precio aumenta (enigma del precio), pero con magnitud pequeña. En constraste, Smets-Wouters (2007), bajo un DSGE estimado, encuentra que el precio se reduce (ausencia del enigma del precio).

El segundo tema importante es la evaluación de los modelos. A diferencia de la forma usual de evaluar los modelos RBC donde se comparaba los estadísticos del modelo teórico con los observados en los datos, en este caso se compara las funciones impulso-respuesta observado en los datos con lo obtenido del modelo. Esto permite discriminar qué modelos (y bajo qué supuestos) se acercan más a la realidad.

[B] Modelos teóricos: Cooper (1998) señala que cualquier modelo que incluya política monetaria enfrenta dos dilemas. El primer dilema es que el modelo debe tener la capacidad de generar una demanda de dinero. El segundo es que el modelo debe contemplar una fuente de no-neutralidad (efectos reales del dinero). Aunque los modelos RBC han tratado de incluir estos dos elementos para capturar los efectos reales del choque monetario observado en la evidencia empírica, el resultado es que estos modelos predicen que dicho efecto es pequeño (lo cual es inconsistente con los datos). Esto representa un limitante principal de los modelos RBC, la cual ha sido superada por los modelos de la Nueva Economía Keynesiana (NEK). Los modelos NEK logran obtener la influencia del dinero en el corto plazo y sus efectos sobre el ciclo económico bajo dos supuestos principales: competencia monopolística (fricción real) y rigidez de precios (fricción nominal).

En este apartado se categoriza las investigaciones teóricas (modelos RBC con dinero) de acuerdo a la forma en cómo cada una de ellas ha modelado la demanda de dinero. Bajo esta premisa, en la literatura se puede distinguir que los modelos RBC usualmente han considerado tres formas de obtener una demanda de dinero: restricción *cash in advance*, saldos reales en la función de utilidad y efectos de liquidez. La primera forma indica que el dinero es requerido para comprar bienes; la segunda indica que los saldos reales bridan utilidad directa al consumidor; y la tercera indica que el dinero puede ser requerido para ahorrar costos de transacción asociados a la compra de bienes. En esta sección se describe las dos primeras formas de obtener una demanda de dinero.

[B1] Restricción *cash in advance*: el fundamento teórico de la restricción *cash in advance* fue desarrollada por Lucas y Stokey (1983, 1987), y Svensson (1985). Asimismo, la aplicación empírica ha sido desarrollada por varios autores entre los cuales se encuentran Eichenbaum y Singleton (1986), Cooley y Hansen (1989,1991 y 1992), Greenwood and Huffman (1987) y Christiano (1991). En este apartado se describe dos de estas investigaciones: la de Eichenbaum y Singleton en 1986, y la de Cooley y Hansen en 1989. Esto se debe a que la primera investigación fue un esfuerzo inicial en evaluar si los modelos RBC con dinero tiene la capacidad de capturar la evidencia empírica. La segunda investigación es elegida porque representa un aporte significativo al estudio del dinero en el marco de los modelos RBC.

Eichenbaum y Singleton (1986) evalúan si los choques de política monetaria fueron importantes en determinar la actividad económica durante el periodo post segunda guerra mundial. Para ello se basaron en dos modelo: el primero es un modelo monetario; es decir, se considera una restricción de *cash in advance* para determinar la demanda de dinero, y se concibe un regla monetaria para representar la oferta de dinero. El segundo es un modelo RBC (sin mercado de dinero). Cabe mencionar que ambos modelos son similares en la representación de los agentes (familia y empresa) y en la consideración de los parámetros.

La única diferencia es el componente monetario. Asimismo, ambos modelos consideran los dos principales supuestos de Long y Plosser (1983), utilidad logarítmica y depreciación total; pero bajo el supuesto que el trabajo es fijo. El principal resultado es que las expresiones de equilibrio son similares en ambos modelos, lo cual sugiere que el dinero no juega un rol en explicar los ciclos. Es más, bajo una formulación de VAR bivariado (crecimiento del dinero y producto), los autores encuentran que un choque exógeno monetario no es una fuente importante de variación del producto en el periodo de post-guerra (1949-1983).

Aunque el trabajo de Eichenbaum y Singleton (1986) es importante en mostrar la débil influencia del dinero en los modelos RBC para explicar los ciclos; no obstante, estos autores no siguieron la evaluación estándar de los modelos RBC: comparar los momentos teóricos (producidos por el modelo) con los momentos empíricos (producidos por los datos) sino se basaron en un modelo VAR y en la causalidad de Granger.

A diferencia de ellos, Cooley y Hansen(1989) siguen el proceso estándar de evaluación de un modelo RBC. En particular estos autores agregan al modelo de Hansen (1985) el mercado monetario similar a Eichenbaum y Singleton (1986). En este modelo el principal mecanismo de transmisión del dinero es el impuesto inflación; es decir, un incremento del dinero (oferta monetaria) produce inflación, la cual se comporta como un impuesto al reducir la capacidad adquisitiva de los consumidores, la cual finalmente afecta su consumo e inversión y sus decisiones de trabajo/ocio; es decir, afecta las variables reales. El principal resultado del modelo es que las características de los ciclos de una economía con alta inflación son similares a una economía con baja inflación; es decir, el dinero no juega un rol relevante para explicar los ciclos económicos.

[B2] Saldos reales en la función de utilidad: Farmer (1996) desarrolló un modelo RBC donde la forma de obtener la demanda de dinero es por medio del supuesto que los saldos reales brindan utilidad a las familias (función de utilidad con saldos reales). Además, otra de las principales diferencias de este modelo, en comparación de los modelos RBC que han considerado el dinero, es que la función de utilidad no sigue la forma estándar de separabilidad temporal[16]. Esto se debe a que el autor busca capturar dos efectos observados del dinero. Por un lado la utilidad marginal de dinero es pequeña (efecto directo); por otro lado, la complementariedad del dinero con otros *commodities* (consumo y la oferta de trabajo) es alta (efecto indirecto).

Una de las principales implicancias de este tipo de función de utilidad es que en el equilibrio de estado estacionario no solo puede existir una solución única, sino que para un conjunto de valores de los parámetros la solución es indeterminada. Es decir, que cerca de la senda de crecimiento balanceado existe un continuo de equilibrios de expectativas racionales[17]. El autor subraya que la indeterminación del equilbrio de estado estacionario

[16] La función de utilidad propuesta por Farmer (1996) es:

$$U(C, M/P, L) = \frac{(F_1(C, M/P))^{1-\rho}}{1-\rho} - (F_2(C, M/P))^{1-\rho} V(L)$$

[17] El caso que estudia Farmer es un conjunto de equilibrios en estado estacionario (indeterminación), pero todos ellos son estables. En constraste, por ejemplo, con el modelo de Ramsey donde existe dos equilibrios en estado estacionario, pero solo uno es estable.

permite al modelo capturar las principales características dinámicas de los datos en USA.

Investigaciones asociadas al choque a la inversión

Una de las principales críticas a los modelos RBC es que su capacidad de replicar los hechos estilizados de los ciclos económicos descansa en que el choque de productividad debe ser significativo y persistente, lo cual no es avalado por la evidencia empírica. Ante ello, diversos autores han estudiado choques alternativos, los cuales tendrían el potencial de explicar los ciclos económicos. Entre ellos, el principal es el cambio tecnológico específico a la inversión. Este choque indica que se podría producir más unidades de capital con una unidad de inversión debido a la existencia de una tecnología específica a la inversión. Esto es diferente al enfoque ortodoxo que indica que con una unidad de inversión se produce una unidad de nuevo capital, lo cual se puede observar en la ecuación del movimiento del capital.

Uno de los primeros esfuerzos en considerar las fluctuaciones de la inversión como posible fuente de los ciclos económicos fue realizado por Greenwood, Hercowitz y Huffman en 1988. A diferencia de los modelos RBC estándar, estos autores introdujeron un choque a la inversión, lo cual refleja la visión Keynesiana que las fluctuaciones de la inversión son importantes para explicar el ciclo. En este modelo el mecanismo de transmisión es la tasa de utilización variable del capital. Los resultados de la simulación de este modelo indican que el choque a la inversión y el mecanismo de transmisión mencionado pueden ser elementos importantes en la explicación de los ciclos económicos.

En la década de los 90's Greenwood, Hercowitz y Krusell elaboraron dos investigaciones complementarias sobre el rol del cambio tecnológico específico a la inversión. La primera fue publicada en 1997, en el cual se centraron en los efectos de largo plazo de este tipo de cambio tecnológico. La principal conclusión de esta investigación fue que dicho cambio tecnológico explica cerca del 60 % del crecimiento del producto por hora hombre después de la segunda guerra mundial. Además, en esta investigación estos autores mostraron la evidencia empírica sobre la existencia de este choque. En particular, estos autores observaron dos comportamientos en los datos: el primero es que en el largo plazo, el precio relativo del equipo se ha reducido significativamente mientras que el ratio inversión en equipo/-producto nacional bruto (PNB) se ha incrementado. El segundo comportamiento es que en el corto plazo existe una correlación negativa entre el precio del equipo y la inversión en equipo o PNB. La primera observación sugiere que el cambio tecnológico específico a la inversión podría ser una fuente de crecimiento económico, mientras que la segunda sugiere que dicho cambio tecnológico podría ser una fuente de fluctuación económica.

La segunda investigación fue publicada en el 2000, en el cual el enfoque de estudio fue los efectos de corto plazo del mismo tipo de cambio tecnológico. En esta investigación los autores utilizaron el mismo modelo RBC de 1997 con algunas modificaciones. Una de ellas es que la tasa de utilización del equipo es endógena, la cual tiene un rol importante en la transmisión de los choques en el corto plazo. La principal conclusión de esta investigación es que el choque específico a la inversión explica alrededor del 30 % de la variabilidad del Producto Nacional Bruto. Los autores indican que este resultado es significativo dada que

la inversión en el nuevo equipo es solo es 7 %.

En línea con lo anterior, diversas investigaciones han resaltado la importancia del cambio tecnológico específico a la inversión en la explicación del ciclo económico (Fisher, 2006; Smets and Wouters, 2007; y Justiniano y Primiceri, 2008). Sin embargo, al introducir este choque en los modelos DSGE se encuentra que produce una correlación negativa entre el consumo y la inversión, lo cual es contrario a los datos (Guerrieri, 2010). Esto representa la principal debilidad de este tipo de choque y es uno de los principales retos de los modelos DSGE.

1.4. Fundamentos teóricos de los modelos RBC

En esta sección se describe los principales supuestos de los modelos RBC y los pasos para desarrollar un modelo de este tipo.

1.4.1. Principales supuestos

Supuestos generales: estos supuestos se concentran esencialmente en el tipo de economía, en el tipo de mercado y en los agentes que participan en el modelo.

- Usualmente los modelos RBC suponen economía cerrada, lo cual implica que la inversión sea igual al ahorro. Sin embargo, varios autores han extendido el modelo a economía abierta (Mendoza, 1991 y 1995).
- Los mercados de factores y bienes finales son de competencia perfecta. No obstante, Rotemberg y Woodford (1993) evaluaron las implicancias del modelo RBC bajo el supuesto de competencia monopolística en el mercado de bienes.
- Se asume dos agentes económicos: familias y empresas. Cuando se considera el gobierno, este es considerado por medio de su restricción presupuestaria. Asimismo, la autoridad monetaria es expresada por su restricción presupuestaria y por una regla de política monetaria.
- La única fuente de incertidumbre proviene por el lado de la oferta (choque de productividad).
- El único bien producido es utilizado para el consumo y la inversión.

Agente representativo: se supone que todas las familias de la economía son idénticas y que pueden ser representadas por una familia típica. De igual forma se supone que existe una empresa representativa. Esta forma de simplificar la economía evita los problemas de agregación.

Optimización: se supone que la familia y empresa representativa optimizan una función objetivo explícita sujeta a restricciones de recursos y de tecnología respectivamente.

Mecanismos de impulso y de transmisión: en base a Ragnar Frisch (1933) y Eugen Slutzky (1937), los modelos RBC diferencian dos tipos de mecanimos: de **impulso** y de **propagación**.

- El **mecanismo de impulso** causa que una variable se desvie de su estado estacionario.

- El **mecanismo de propagación** amplifica los efectos del mecanismo de impulso sobre las variables endógenas y hace que la desviación de dichas variables con respecto a su estado estacionario sea persistente durante un periodo de tiempo.

El principal mecanismo de impulso en los modelos RBC es el **choque a la productividad**, y el principal mecanismo de propagación es la **elasticidad de sustitución del ocio**. En la literatura RBC se puede observar al menos cuatro tipos de mecanismos de propagación:

- **Suavizamiento del consumo:** un choque temporal (positivo) sobre la economía afectará fuertemente el ahorro. En una economía cerrada, la inversión es igual al ahorro; por tanto, la inversión se incrementará permitiendo un mayor stock de capital en el siguiente periodo, dada su participación en la función de producción, elevará el producto en dicho periodo [**mecanismo débil**].

- **Rezagos de inversión:** un choque hoy puede afectar la inversión en el futuro (Kydland y Prescott, 1982) incrementando el producto futuro [**mecansimo mas usado**].

- **Elasticidad de sustitución intertemporal:** una variación de los salarios incrementa la cantidad de trabajo ofrecido cuyo efecto sobre el producto es positivo [**mecansimo mas usado**].

- **Acumulación de inventarios:** las firmas acumulan inventarios para hacer frente a variaciones inesperadas en la demanda [**mecanismo no consistente con la evidencia empírica**].

Expectativas Racionales: se supone que los agentes presentes en la economía tienen expectativas racionales con el fin de superar la "Crítica de Lucas".

Equilibrio General: la teoría RBC mantiene el enfoque de Walras (equilibrio general) en un contexto de competencia perfecta (precios flexibles) donde los agentes son precio aceptantes y existe un continuo de equilibrio de mercado, información simetrica, mercados completos y ausencia de fricciones.

Dinámico: considera un análisis intertemporal, donde las decisiones de los agentes son tomadas intertemporalmente.

1.4.2. Pasos para desarrollar un modelo RBC

En esta sección se describe de manera práctica los pasos o etapas que se deben de seguir en el desarrollo de un modelo RBC y en general en cualquier modelo DSGE. La figura [1.16] esboza los once pasos.

[1] Construir el modelo: en esta etapa se define los principales supuestos del modelo, los cuales incluyen al menos [a] el tipo de economía (abierta o cerrada), [b] agentes en

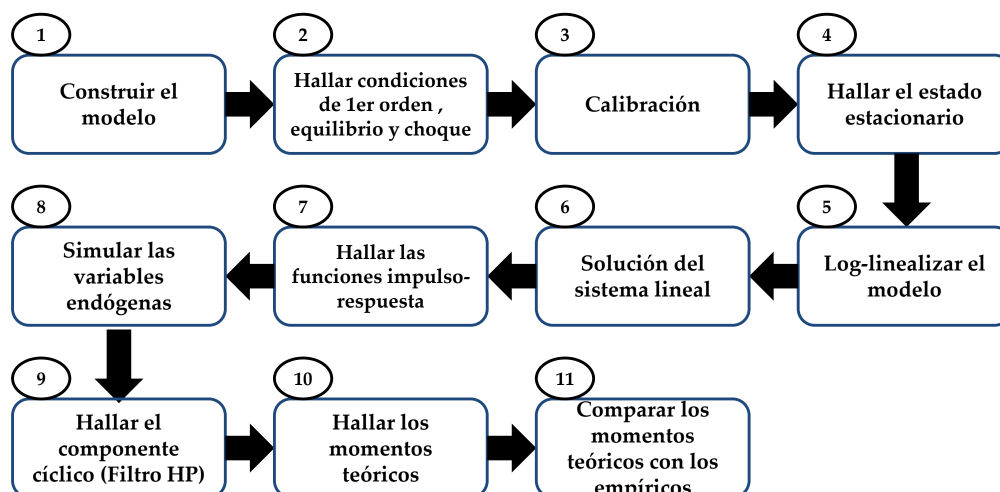


Figura 1.16. Pasos para desarrollar de un modelo RBC

la economía (familia, empresas, gobierno y autoridad monetaria), [c] las reglas de comportamiento de cada agente (función objetivo de maximización y las restricciones), [d] supuestos sobre el mercado de factores y de bienes (competencia perfecta o competencia monopolítica o alguna combinación de ambas) y [e] el tipo de choque (productividad, fiscal, monetario, tasa de interés internacional, entre otros).

[2] **Hallar condiciones de primer orden, equilibrio y choque:** en esta etapa se procede a resolver el problema de optimización de cada agente. Por ejemplo, la familia usualmente maximiza su función de utilidad descontada esperada sujeto a su restricción presupuestaria. Al resolver este problema de optimización usualmente se obtiene la ecuación de Euler y la oferta de trabajo. De la misma manera se procede con la empresa, quien maximiza su función de beneficios sujeto a la tecnología disponible (funcion de producción). De esta optimización usualmente se obtiene la demanda de trabajo y de capital. Además de estas ecuaciones es necesario indicar explicitamente las ecuaciones de equilibrio de mercado. Por ejemplo es usual considerar el equilibrio en el mercado de bienes ($c_t + i_t = y_t$). Finalmente se debe de hacer explícito el comportamiento del choque; es decir, indicar si este tiene un comportamiento AR(1). Todo este conjunto de ecuaciones representa un sistema no lineal. Es importante mencionar que el número de ecuaciones debe ser igual al número de variables para que el sistema esté bien definido.

[3] **Calibración:** en esta etapa se asigna un valor a cada parámetro. Si el modelo es totalmente calibrado entonces todos los parámetros tienen un valor asignado en base a otras investigaciones. En esta etapa de manera práctica se podría realizar una lista de los parámetros con sus valores asignados y las investigaciones de donde se ha extraido dichos valores.

[4] **Hallar el estado estacionario:** para hallar el estado estacionario es necesario tomar el sistema de ecuaciones de la segunda etapa. A dicho sistema se elimina toda la temporalidad; es decir, en todas las ecuaciones se realiza el siguiente cambio de variable:

$x_t = x_{t+1} = x_{ss}$, donde x_{ss} representa el valor de estado estacionario de la variable "x". Asimismo, se elimina el operador expectativas en aquellas ecuaciones donde este presente. Por ejemplo, al considerar la ecuación de Euler $c_t^{-1} = \beta E_t c_{t+1}^{-1} R_{t+1}$ en estado estacionario se elimina las expectativas quedando $c_t^{-1} = \beta c_{t+1}^{-1} R_{t+1}$, y si además aplicamos el principio previo de eliminar la temporalidad, la ecuación de Euler en estado estacionario sería $c_{ss}^{-1} = \beta c_{ss}^{-1} R_{ss}$. El objetivo de esta etapa es encontrar el valor de estado estacionario de cada variable del sistema x_{ss} en función del conjunto de parámetros, los cuales han sido previamente calibrados. Por ejemplo, de la ecuación de Euler en estado estacionario se infiere que la tasa de interés real en estado estacionario depende del factor de descuento $R_{ss} = \frac{1}{\beta}$.

[5] Log-linealizar el modelo: el sistema de ecuaciones no lineal descrito en la segunda etapa requiere ser linealizado para aplicar los métodos matemáticos de solución de sistema de ecuaciones lineales. En términos generales, la linealización es apróximar una ecuación no lineal por medio de la expansión de Taylor de primer orden. En este estadío se puede linealizar el modelo considerando las variables en niveles o considerando a las variables en logarítmo, esta última recibe el nombre de log-linealización. En ambos casos la linealización se realiza alrededor del estado estacionario de cada variable.

[6] Solución del sistema lineal: la solución del sistema lineal consiste en encontrar las funciones de políticas; es decir, las variables de control en función de las variables de estado y variables exógenas. En la literatura existe varias formas de resolver el sistema de ecuaciones en diferencias estocásicas. Dejong y Dave (2007) sugieren que al menos cuatro métodos son usuales: método de Blanchard y Kahn (1983), método de Sim (2001), método de Klein (2000) y el método de coeficientes indeterminados de Uhlig (1999). Para encontrar la solución del sistema usualmente se utiliza un software como Matlab debido a que el sistema de ecuaciones es grande. En algunos casos como por ejemplo el modelo de Long y Plosser (1983) en su versión de un solo sector podría tener una solución analítica. La solución del sistema es importante porque en base a ella se obtendrá los pasos siguientes (función impulso-respuesta, simulación de las variables, componente cíclico de cada variable y los momentos teóricos).

[7] Hallar la función impulso-respuesta: en esta etapa se calcula la función impulso respuesta de cada variable del modelo ante el choque definido previamente en el modelo. Tres elementos se deben de observar en la respuesta de cada variable: la magnitud, el signo, y el número de periodos que demora la variable en volver al estado estacionario. Esto es importante debido a que usualmente se compara la función impulso-respuesta del modelo con lo observado en los datos. Para obtener la función impulso-respuesta se expresa cada variable en su forma de serie de tiempo ARMA(p,q). Para ello se utiliza la solución de cada variable obtenida en la etapa previa.

[8] Simular las variables endógenas: al tener cada variable expresada en su forma ARMA(p,q) permite realizar simulaciones de cada variable asumiendo que el error de la ecuación del choque es una serie con distribución normal con media cero y varianza constante. Usualmente el número de periodos que se considera en la simulación es el mismo que se dipone en los datos. Por ejemplo, si la muestra disponible con la cual se calcula los momentos empíricos comprenden 120 datos trimestrales, entonces este mismo número se

considera para la simulación de las series en el modelo. Otro aspecto es el *número de veces* que la serie se simulará. En la literatura no está claro el número de veces que se debe de simular; sin embargo, se podría considerar un número cercano a 100. Por ejemplo, Hansen (1985) simuló las series 100 veces al igual que Cooley (1995, Cap. 1), mientras que Cooley y Hansen (1989) utilizaron 50 simulaciones.

[9] Hallar el componente cíclico: en la etapa 7 y 8 se ha considerado las variables en niveles; es decir, cada variable contiene su componente tendencial y cíclico. Sin embargo, para evaluar si el modelo RBC tiene la capacidad de replicar los hechos estilizados del ciclo económico se debe de extraer el componente cíclico de cada variable, para luego calcular sus momentos teóricos. En la literatura existen varios métodos para extraer el componente cíclico de las variables. El más utilizado en la escuela RBC es el filtro de Hodrick y Prescott (1981).

[10] Hallar los momentos teóricos: en esta etapa se calcula los momentos teóricos del componente cíclico de cada variable. Usualmente estos momentos téoricos son cuatro: desviación estándar, autocorrelación, correlación con el PBI y correlaciones dinámicas.

[11] Comparar los momentos teóricos con los empíricos: en esta etapa se compara los momentos teóricos brindados por el modelo con los momentos teóricos encontrados en los datos. El objetivo de esta etapa es evaluar si el modelo es capaz de capturar los hechos estilizados de la economía.

1.5. Códigos

En el cuadro [1.9] se indica el código utilizado en este capítulo.

Cuadro 1.9: Códigos en Matlab y Dynare

Códigos	Descripción
Hechos_estilizados_agregados.m	Este m-file grafica las variables macroeconómicas en niveles y halla el componente cíclico por medio del filtro HP. Además, calcula los estadísticos del componente cíclico.

Capítulo 2

Fundamentos de Dynare

2.1. Introducción

Los modelos DSGE se pueden resumir en un conjunto de ecuaciones en diferencias con no linealidades. La naturaleza de este sistema exige aplicar métodos numéricos para aproximarse a la solución. Realizar este trabajo sin un *software* es muy tedioso y hasta quizá ineficiente.

Matlab es un *software* que tiene implementado las herramientas de optimización y solución de ecuaciones en diferencias nolineales; además, trabaja bajo un enfoque matricial. Estas características convierten a este software en un candidato importante para la solución y simulación de los modelos DSGE. Sin embargo, contextualizar el modelo al lenguaje de Matlab requiere que el usuario tenga un nivel avanzado de programación en dicho lenguaje, lo cual complica la utilización de este *software*.

En este escenario diversos grupos de economistas, con formación en matemática e informática, han tratado de construir programas basados en Matlab que faciliten la solución de los modelos DSGE. En estos esfuerzos surge Dynare como un preprocesador que permite traducir el modelo en lenguaje de Matlab[1].

En línea con lo anterior, el objetivo de este capítulo es entender los principales comandos de Dynare que son utilizados para realizar cada uno de los pasos en la construcción y simulación de un modelo DSGE. Para ello este capítulo está dividido en tres partes.

En la primera parte se describe cada uno de los comandos necesarios para trasladar el modelo DSGE al ambiente de Dynare; además, se menciona los comandos necesarios para resolver y simular el modelo.

En la segunda parte se ilustra los códigos antes mencionados al aplicarlos en un modelo RBC básico (modelo de Long y Plosser, 1983). Finalmente, en la última sección se menciona los códigos utilizados en este capítulo.

[1]Este capítulo está basado en el manual de Dynare disponible en su página web "www.dynare.org". Asimismo, en esta página se encuentra este *toolbox* listo para descargarlo y diferentes ejemplos ilustrativos.

2.2. ¿Qué es Dynare?

Dynare es un pre-procesador y colección de rutinas de Matlab. Es decir, Dynare es una colección de códigos de matlab que actua como un *toolbox*. El objetivo prncipal de Dynare es resolver, simular y estimar diferentes modelos no lineales con variables *forward looking*, entre los cuales se encuentran los modelos DSGE y OLG (generaciones traslapadas).

El principal insumo de este *toolbox* es un archivo con extensión ".mod", donde se escribe el modelo y las sentencias que se desea que Dynare ejecute (resolver, estimar, etc). Para crear este archivo se abre un block de notas y se guarda con extensión mod. En este contexto, ¿Cómo se invoca Dynare?: luego de crear el archivo .mod "`ejemplo.mod`", en el *prompt* de Matlab se coloca lo siguiente:

>> `dynare` ejemplo

El comando **dynare** pone en marcha el pre-procesador (Dynare) sobre el archivo .mod y ejecuta las instrucciones incluidas en este archivo ("ejemplo.mod"). Considerando un nombre genérico para el archivo .mod "filename.mod", el pre-procesador crea 3 archivos intermedios:

Cuadro 2.1: Archivos creados por Dynare

3 archivos intermedios creados por Dynare		
filename.m	**filename_dynamic.m**	**filename_static.m**
Contiene [1]declaración de variables y [2]tareas de cálculo.	Contiene las ecuaciones del modelo dinámico; es decir, considera los adelantos y rezagos de las variables.	Contiene las ecuaciones del modelo estático de largo plazo; es decir, considera la ecuaciones sin temporalidad.

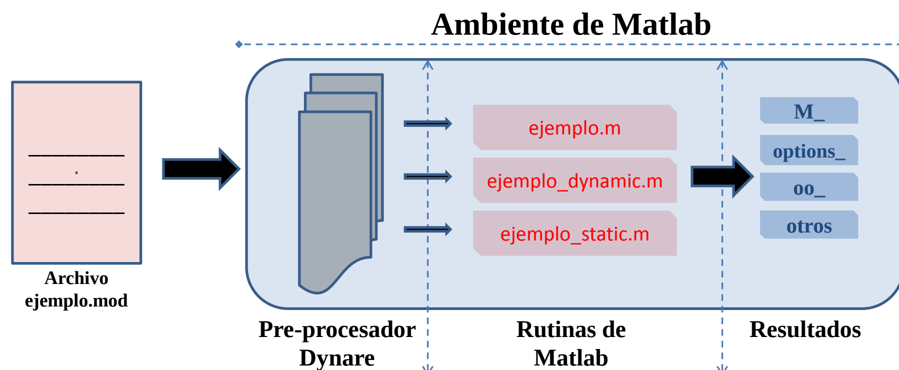
Dynare ejecutará las tareas de cálculo al ejecutar el archivo "**filename.m**". Entre los resultados de Dynare se encuentra 3 principales variables (se muestran en el *workspace de Matlab*):

Cuadro 2.2: Variables creadas por Dynare

3 principales variables (estructura) creados por Dynare		
M_	**options_**	**oo_**
Contiene información variada del modelo. Por ejemplo: el nombre del archivo mod y nombres de las variables.	Contiene los valores de varias opciones usadas por Dynare durante el cálculo	Contiene varios resultados del cálculo. Por ejemplo: la función impulso-respuesta y las simulaciones.

Dynare guarda estas tres variables en la carpeta de trabajo actual (*current folder*) con el nombre: "**filename_results.mat**". En la figura [2.1] se muestra cómo Dynare trabaja con Matlab.

Figura 2.1: Dynare como pre-procesador de Matlab



2.3. Estructura del archivo .mod

El archivo que contiene el modelo (.mod), el cual será utilizado por Dynare, tiene una estructura de seis bloques principales (figura [2.2]). El primer bloque es el preambulo, en el cual se especifica las variables endógeneas y exógenas, y los parámetros del modelo. El segundo bloque es el modelo propiamente dicho. Es este bloque se escribe las ecuaciones en sus versión no lineal o lineal (o log-lineal). El tercer bloque es la especificación de los valores iniciales, los cuales definen el punto de partida para que Dynare calcule el estado estacionario del sistema. El cuarto bloque es el cálculo del estado estacionario. El quinto bloque corresponde a la definición de la varianza o desviación estándar de los choques; finalmente, el sexto bloque contiene el cálculo de la solución del modelo, las simulaciones, el cálculo de los momentos y la construcción de las funciones impulso-respuesta.

Es importante mencionar que además de estos seis bloques se pueden agregar otros comandos dependiendo de las tareas que se requiera; por ejemplo, si se desea hacer análisis de sensibilidad de los parámetros se puede agregar comandos que realicen esta tarea. Los seis bloques antes mencionados son las partes fundamentales que todo archivo .mod debe de tener.

2.3.1. El preámbulo

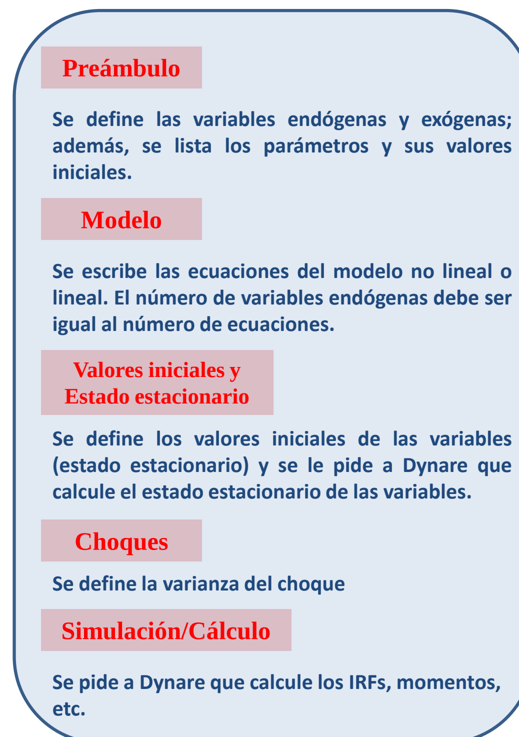
En el preámbulo se especifica las variables (endógenas y exógenas) y los parámetros (y sus valores). Tres comandos le indicarán a Dynare qué variables son del modelo y cuales son los parámetros: variables (*var* y *varexo*) y parámetros (*parameters*).

Código 1. Declaración de variables endógenas

```
var variable_name1 $latex_name1$ (long_name= 'nombre');
```

El comando **var** declara las variables endógenas y tiene tres componentes: el primero se refiere al nombre de la variable que será utilizado en todo el archivo .mod (`variable_name1`); el segundo indica el nombre que esta variable tomará en el archivo LaTeX ($latex_name1$); y el tercero es una opción (la cual tiene que estar entre paréntesis) que permite escribir el nombre largo de la variable (long_name= 'nombre'). El cuadro [2.3] ilustra la utilización de este código.

Figura 2.2: Estructura del archivo .mod



Código 2. Declaración de variables exógenas

```
varexo variable_name1 $latex_name1$ (long_name= 'nombre');
```

El comando **varexo** declara las variables exógenas (choques) y, de la misma forma que las variables endógenas, tiene tres componentes: el primero se refiere al nombre de la variable que será utilizado en todo el archivo .mod (`variable_name1`); el segundo indica el nombre que esta variable tomará en el archivo LaTeX ($latex_name1$); y el tercero es una opción (la cual tiene que estar entre paréntesis) que permite escribir el nombre largo de la variable (long_name= 'nombre').

Cabe mencionar que en un modelo estocástico usualmente la productividad (a_t) tiene un comportamiento autorregresivo de la siguiente forma:

$$a_{t+1} = \rho a_t + \epsilon_t$$

Donde ϵ_t es el componente estocástico, con una distribución normal con media cero y varianza constate. Para Dynare, a_t es una variable endógena y debido a que ϵ_t es un ruido blanco, esta es considerada como una variable exógena. Por tanto, bajo los comandos declarados en el código 2, esta variable exógena se podría escribir en Dynare de tres formas (ver cuadro [2.4]).

Código 3. Parámetros

```
parameters parametro_name1 $latex_name1$ (long_name= 'nombre1')
parametro_name2 $latex_name2$ (long_name= 'nombre2');
```

Cuadro 2.3: Ejemplos de declaración de variables endógenas

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
var	var	var
y	y y_t	y y_t (long_name = 'Producto')
c	c c_t	c c_t (long_name = 'Consumo')
k;	k k_t;	k k_t (long_name = 'Capital');

Cuadro 2.4: Ejemplos de declaración de variables enxógenas

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
varexo e	varexo e e_t	varexo e e_t (long_name = 'Choque de productividad')

El comando *parameters* declara los parámetros que se usarán en el modelo. No solo los parámetos de las ecuaciones (funciones) de comportamiento de los agentes (por ejemplo la función de utilidad); sino también, los valores iniciales, que usualmente son los valores de estado estacionario, y los parámetros asociados a los choques. Además, en este segmento se debe de asignar los valores que corresponden a cada parámetro (calibración). El cuadro [2.5] describe tres ejemplos de la declaración de los parámetros y de la asignación de sus valores.

Cuadro 2.5: Ejemplos de declaración de parámetros

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
parameters	parameters	parameters
beta	beta $ \ beta$	beta $ \ beta$ (long_name = 'Elasticidad de Frisch')
delta;	delta $ \ delta$;	delta $ \ delta$ (long_name = 'Depreciación');
beta=0.99;	beta=0.99;	beta=0.99;
delta=0.22;	delta=0.99;	delta=0.99;

2.3.2. El modelo

El modelo (sistema de ecuaciones no lineales) es declarado en Dynare por medio del bloque *model;...end;*.

Código 4. Declaración del modelo

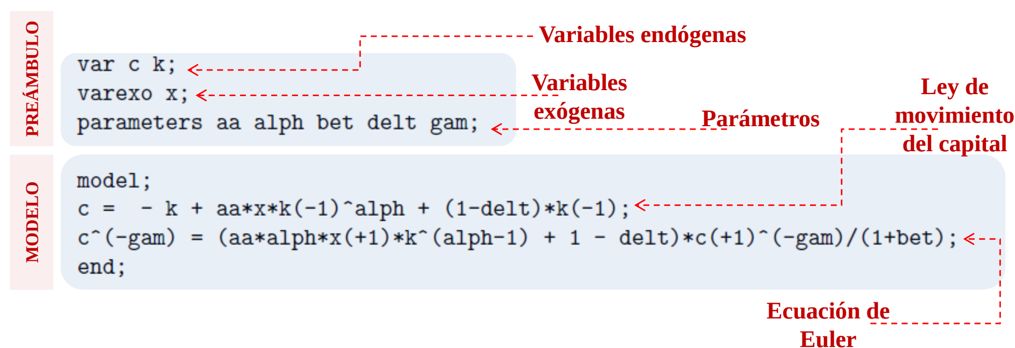
```
model(opciones); ecuación1; ecuación2;...;ecuaciónN; end;
```

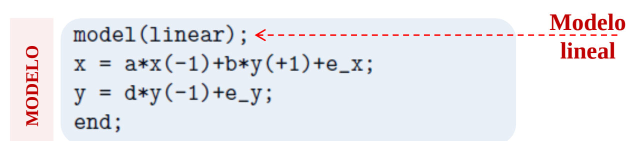
Este bloque detalla las ecuaciones principales del modelo. Se puede escribir el modelo (no-lineal) en Dynare tal como se tiene en el *papel*, para ello se introduce las ecuaciones en el ambiente `model;` − − − `end;`

Código
model;
ecuación1;
ecuación2;
...
ecuaciónN;
end;

Se tiene que tener en cuenta que el número de ecuaciones debe ser igual al número de variables endógenas. Si el modelo que se escribe en Dynare está linealizado (sea con variables en niveles o variables en logarítmo), entonces se escribe: **model(linear)**.

Figura 2.3: Modelo nolineal y lineal





2.3.3. Valores iniciales

Dentro de este bloque se coloca los valores inciales de cada una de las variables endógenas, los cuales generalmente son los valores de estado estacionario calculados por el usuario. Estos valores son utilizados por Dynare como punto de partida para el cálculo del estado estacionario. Es importante mencionar que cuando el modelo está en forma log-lineal, los valores de estado estacionario de las variables (en log-desviaciones) son iguales a cero; por tanto, los valores iniciales son iguales a cero.

Código 5. *Declaración de los valores iniciales*

```
initval; variable_name1 = valor1; variable_name2 = valor2;...;variable_nameN = valorN; end;
```

El cuadro [2.6] describe dos ejemplos de valores iniciales.

Cuadro 2.6: Valores iniciales (modelo no-lineal y lineal)

Código	Ejemplo (no-lineal)	Ejemplo (log-lineal)
initval;	`initval;`	`initval;`
variable_name1 = valor1;	`c = 0.5;`	`ch = 0`
variable_name2 = valo2;	`k = 0.1;`	`kh = 0`
...	...	...
variable_nameN = valorN;	`y = 0.8;`	`yh = 0`
end;	`end;`	`end;`

Es preciso mencionar que la variable ch es igual a "$lnc_t - lnc_{ss}$"; es decir, es la desviación de la variable en logarítmo con respecto a su estado estacionario. La cual, por construcción, en estado estacionario es igual a cero.

Los valores iniciales son los que Dynare utilizará en el "filename_static.mod" para calcular el estado estacionario. Dynare necesita un punto de partida para dicho cálculo debido a que el método de solución es de apróximaciones sucesivas (método de Newton).

2.3.4. Estado estacionario

Dynare tiene dos formas de considerar el estado estacionario del modelo. La primera es que Dynare mismo calcule el estado estacionario. Para ello Dynare utiliza el método de Newton para resolver ecuaciones no lineales. La segunda es brindarle a Dynare un archivo de Matlab (m-file) que contenga el estado estacionario.

El método de Newton o conocido también como el método de Newton − Raphson es una técnica orientada a resolver ecuaciones no lineales. Esta técnica encuentra la solución por medio de iteraciones sucesivas desde un punto inicial. El objetivo de esta técnica consiste en encontrar los valores de la variable "x" que hacen que la función (o ecuación) sea cero; es decir, busca las raices de la función:

$$f(x) = 0$$

La técnica empieza con un punto inicial x_0 y aproxima el siguiente valor de "x" por medio:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \xrightarrow{\text{Generalizando}} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Esto aplicado al cálculo de estado estacionario del modelo se tiene, por ejemplo, para la función de producción:

$$y_t = a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$$

Definimos $f(x)$, donde $x = [y_t, a_t, k_t, h_t]$

$$f(x) = y_t - a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} = 0$$

El objetivo es encontrar la solución; es decir, el estado estacionario ($x_t = x_{t+1}$). Para ver mayor detalle del método revisar Kelley (2003).

Código 6. *(Método 1) Usando el método de Newton*

```
steady;
```

Para que Dynare calcule el estado estacionario por el método de Newton se coloca el comando **steady** después del bloque del modelo. Para ello considera como punto inicial los valores que se indiquen en la sección `initval`. Dynare aplica el método de Newton al modelo estático (el modelo del .mod sin rezagos ni adelantos) para encontrar el estado estacionario.

Código 7. *Guardando el estado estacionario*

```
oo_.steady_state;
```

El estado estacionario calculado por `steady` se guarda en "oo_.steady_state". Cabe mencionar que el orden en que aparecen los estados estacionarios es el mismo en cómo han sido declaradas las variables endógenas en la sección `var`.

Código 8. *(Método 2) Usando un archivo que contenga el estado estacionario*
En este segundo método existen dos opciones:

- **Bloque de "estado estacionario" en el .mod:** en este caso se define cada variable en función de los parámetros profundos. El código es:
  `steady_state_model; r = 1/beta; k = delta*beta;...;end;`

  El m-file en que guardará Dynare los estados estacionario es "NombreMod_steadystate2.m". Donde "NombreMod" es el nombre del archivo" .mod". Cabe mencionar que este bloque se coloca después del bloque de *parámetros*.

- **m-file que contenga el "estado estacionario":** en este caso se puede construir una función en Matlab que calcule los estados estacionarios. Esto requiere hacer un poco más de programación en un m-file.

2.3.5. Dynare y LaTeX

En dynare existe la posibilidad de trasladar las ecuaciones del modelo al formato de LaTeX. Para ello se usa dos códigos dependiendo de qué tipo de modelo se desea traducir en lenguaje LaTeX:

Código 9. *Modelo dinámico en LaTeX*

```
write_latex_dynamic_model;
```

Este código escribe cada ecuación del modelo en formato LaTeX y lo guarda en un archivo ".tex" dependiendo del nombre del archivo ".mod". Por ejemplo, si el archivo mod tiene el nombre de "campbell.mod", el archivo en LaTeX será "campbell_dynamic.tex", el cual contiene la lista de todas las ecuaciones dinámicas. Cabe mencionar que si en los parámetros y en las variables se han declarado nombres en versión LaTeX, el archivo ".tex" los usuará.

Código 10. *Modelo estático en LaTeX*

```
write_latex_static_model;
```

Este código permite guardar las ecuaciones del modelo, en su versión estática, en un archivo ".tex". La versión estática significa que en las ecuaciones se han eliminado los rezagos y atrasos. De la misma manera que el código para el modelo dinámico, la versión estática se guarda en "campbell_static.tex" (cuando el modelo en Dynare se llama "campbell.mod").

Cabe mencionar que estos códigos (ecuaciones dinámicas o estáticas) se escriben después del bloque *model*.

2.3.6. Definición de los choques

En este bloque se define los choques temporales del modelo (choque de productividad, de gasto público, etc.). En Dynare las variables exógenas (choque) toma valores aleatorios que siguen una distribución normal con media cero y varianza constante. En el archivo .mod se debe de especificar la varianza.

Código 11. *Definición de choques*

Para definir la varianza o desviación estándar el choque existe dos formas:

Alternativa 1	*Alternativa 2*
`shocks;`	`shocks;`
`var variable_name =` *valor_varianza;*	`var variable_name`*;*
`end;`	`stderr` *valor_desviación_estándar;*
	`end;`

En el cuadro [2.7] se describe un ejemplo de la aplicación del código del bloque del choque.

Cuadro 2.7: Definición del choque

Alternativa 1	**Alternativa 2**
`shocks;`	`shocks;`
`var e = 0.5;`	`var e;`
`end;`	`stderr` $0.5^{1/2}$;
	`end;`

2.3.7. Evaluación del modelo: condiciones de Blanchard y Kahn

Dynare tiene la capacidad de calcular los eigenvalores del modelo linealizado alrededor de los valores asignados en el bloque de `initval`, los cuales usualmente son los estados estacionarios. En particular, si el número de eigenvalores con módulo mayor a uno es igual al número de variable *forward looking*, entonces el sistema de ecuaciones linealizadas tiene solución única. En el capítulo 3 se detalla estos criterios y el método de solución de Blanchard y Kahn (1980).

Código 12. *Evaluación del modelo*

```
check;
```

Este comando calcula los eigenvalores y los guarda en la variable global "oo_.dr.eigval". Dynare también cuenta con otro comando que brinda varias pruebas de salud del modelo e imprime un mensaje si es que un problema es detectado: `model_diagnostics;`.

2.3.8. Cálculo de la solución estocástica

Dynare utiliza el código `stoch_simul` para obtener las funciones de política y de estado (transición) del modelo.

Código 13. *stoch_simul (opciones)*
Este comando resuelve el modelo estocástico (o modelo de expectativas racionales) usando el método de perturbación[2]*. Cabe mencionar que en el proceso de solución del sistema de ecuaciones, Dynare utiliza el método de descomposición generalizada de Schur (o descomposición QZ). Lo que hace este método es descomponer una matriz en tres matrices multiplicativas:* $A = QUQ^{-1}$*. La descomposición de Schur mantiene el mismo espíritu que la descomposición de Jordan (ver el capítulo 3 para mayor detalle).*

Dentro de las opciones de `stoch_simul` se le puede solicitar a Dynare que realice operaciones especificas como hallar los impulsos respuestas, estimar los parámetros, etc. Por ejemplo:

stoch_simul(order=1;irf=30)

Esta sentencia indica a Dynare que al sistema de ecuaciones no lineales (escrito en el bloque `model`) lo linealice por medio de un apróximación de Taylor de primer orden, la cual es calculada alrededor del estado estacionario (order=1). Luego, usa esas aproximaciones para calcular la función impuslo-respuesta (IRF por sus siglas en inglés) y diversos estadísticos descriptivos (momentos, descomposición de varianza, coeficientes de correlación y autocorrelación). Además, esta sentencia le indica a Dynare que calcule la función impulso-respuesta con 30 periodos (irf = 30). El IRF es calculado como la diferencia entre la trayectoria de la variable ante un choque (en $t = 1$) y su estado estacionario. Dynare grafica el IRF solo para 12 variables.

[2]Este método construye aproximaciones de series de Taylor para la solución del modelo DSGE alrededor de su estado estacionario determinístico. Este método ha sido utilizado en física y en otras ciencias naturales; en economía fue popularizado por Judd y Guu (1993). Este método ha ganado popularidad en economía en las últimas dos décadas debido a tres razones:

- Es adecuado. El método de perturbación encuentra una solución apróximada que es local; es decir, que es muy adecuada alrededor del punto donde se toma la expansión de Taylor.
- El resultado es intuitivo y facilmente interpretable.
- Gracias al desarrollo de *software* como Dynare y Dynare++, el método de perturbación para mayores grados de expansión son fáciles de calcular y no requiere estar familiarizado con métodos numéricos.

Cuadro 2.8: Opciones de stoch_simul

[1] Solución del modelo	
order = entero	Indica el orden de la apróximación de Taylor. Los valores disponibles son 1, 2 y 3 (*default = 2).* **Ejemplo:** $stoch_simul(order = 1);$
loglinear	Transforma todas las variables en log-lineales. Por tanto, nos tenemos que asegurar que los estados estacionarios son estrictamente positivos. Todos los resultados (FIR, momentos, función de política, etc) son considerando que las variables son log-lineal. **Ejemplo:** $stoch_simul(loglinear);$
[2] Función impulso respuesta (FIR)	
irf = entero	Número de periodos para el cálculo de la FIR (*default = 40). Las FIR se guardan en "oo_.irfs".* **Ejemplo:** $stoch_simul(order = 1, irf = 30);$
irf_shocks = (nombre de la variable exógena)	Calcula la FIR para la variable exógena solicitada. Se usa cuando en el modelo existen varios choques. **Ejemplo:** $stoch_simul(order = 1, irf_shocks = (e));$

El código "stoch_simul" brinda las funciones de política y de estado (conocidas también como reglas de decisión), cuyos coeficientes se guardan en "oo_.dr" (**dr** es un diminutivo para *decision rules*). Cabe mencionar que la función de política, en Dynare, tiene la siguiente estructura:

$$y_t = y_{ss} + Ax_t + Bu_t$$

Donde: y_{ss} es el vector del estado estacionario de las variables.

- **oo_.dr.ys:** guarda los estados estacionarios y_{ss}, cuyo orden es similar a como han sido declaradas las variable en el bloque `var`.
- **oo_.dr.ghx:** guarda la matriz "A". Las filas corresponden a toda las endógenas (en orden como están listadas en "oo_.dr.order_var"); mientras que las columnas corresponden a las variables de estado.
- **oo_.dr.ghu:** guarda la matriz "B". Las filas corresponden a toda las endógenas (en orden como están listadas en "oo_.dr.order_var"); mientras que las columnas corresponden a las variables exógenas.

2.3.9. Simulación y filtro HP

De la solución del sistema de ecuaciones no lineales se puede obtener el comportamiento en series de tiempo de cada una de las variables endógenas; por ejemplo, la función de estado del capital podría sugerir que el capital se comporta como un AR(2) o de la función de política del producto se puede deducir que el producto se comporta como un

ARMA(2,1). El camino para obtener la serie de tiempo de cada variable se describirá en detalle en el capítulo 3 y 4. Al tener la representación de series de tiempo se puede realizar una simulación de la variable. Para ello dos insumos son importantes: el número de periodos (meses, trimestres o años) que deseamos simular la variable, y el número de veces de simulación; por ejemplo, se podría desear simular 30 veces la misma variable.

Para realizar esta simulación en Dynare se usa dos comandos en "stoch_simul": `periods` y `simul_replic`. Ambas están descritas en el cuadro [2.9]. De otro lado si se desea que Dynare grafique alguna variable simulada se puede escribir, después de "stoch_simul" el código "rplot nombre_variable" y Dynare mostrará la gráfica.

Cuadro 2.9: Opciones (continuación) de stoch_simul

[3] Simulación de las variables endógenas	
periods = entero	Indica el número de periodos que se usará en la simulación de cada variable endógena (solo realiza **una** simulación). Dicha simulación es guardada en la matriz global *oo_.endo_simul*. Bajo esta opción los momentos empíricos serán calculados en lugar de los teóricos. **Ejemplo:** $stoch_simul(order = 1, periods = 300)$;
simul_replic = entero	Esta opción permite simular las variables el número de veces que se indica en el "entero". Esta opción siempre va acompañada de la opción "*periods*". **Ejemplo:** $stoch_simul(order = 1, periods = 300, simul_replic = 150)$;. Este ejemplo indica que se debe simular 150 veces las variables para 300 periodos cada una. Cabe mencionar que estas simulaciones no se consideran para calcular los momentos empíricos; además, se guardan en "NombreMod_simul". El valor por *default* es uno.
rplot nombre_variable	Grafica las variables simuladas, que estan guardadas en "oo_.endo_simul". Este comando se coloca después de "stoch_simul", en el cual es necesario colocar *periods*. **Ejemplo:** stoch_simul(order = 1, periods=150); rplot c;
[4] Filtro HP	
hp_filter = entero	Usa el filtro HP con λ = entero (mensual:14400 ;trimestral:1600; anual:100) para calcular los momentos. **Ejemplo:** $stoch_simul(order = 1, hp_filter = 1600)$;

Asimismo, si se desea evaluar la habilidad del modelo en capturar el comportamiento del ciclo económico es necesario calcular los momentos teórico del componente cíclico de cada variable proveniente del modelo. En ese sentido es necesario aplicar un filtro que permita separar el ciclo de la tendencia. Para esta tarea, Dynare cuenta con el filtro HP, cuyo código es: `hp_filter = entero`, el cual se coloca dentro de "stoch_simul". El "`entero`" refleja el parámetro de suavizamiento, el cual varía en valor dependiendo de la frecuen-

cia (mensual, trimestral o anual). La elección del parámetro radica en la frecuencia en que los parámetros del modelo han sido calibrados; por ejemplo, si todos los parámetros del modelo (tasa de depreciación, factor de descuento de la utilidad, etc) han sido calibrados trimestralmente, entonces el parámetro de suavizamiento en el filtro HP debe ser trimestral. El cuadro [2.9] se describe en mayor detalle lo mencionado líneas arriba.

2.3.10. Análisis de sensibilidad

Es usual realizar análisis de sensibilidad del modelo ante un cambio en el valor de los parámetros. Por ejemplo, es útil comparar los IRFs del modelo ante dos valores distintos del parámetro de persistencia del choque. Para realizar este tipo de tareas, Dynare brinda una opción por medio de comandos "macro". Este macro-lenguaje de Dynare provee un conjunto de macro-comandos, los cuales se pueden insertar en el archivo ".mod". Las principales tareas que realiza este macro-lenguaje son: incluir un archivo en el .mod, sustitución de expresiones, estructuras condicionales (if) y bucles (for).

En esta subsección se hace énfasis en los bucles (*loops*) debido a que estos ayudan a realizar análisis de sensibilidad. En el cuadro [2.10] se hace una comparación del macro-lenguaje de Dynare y el código de Matlab. Ambos producen lo mismo, la principal diferencia entre ellos es que el vector que contiene los valores del parámetro no aparecerá en el ambiente de Matlab cuando corremos el macro-lenguaje, mientras que el código de Matlab reemplazará sucesivamente los valores del parámetro, mostrando el último valor en el *workspace* de Matlab y guardará el vector de valores del parámetro. Cabe mencionar que estos códigos se escriben después del "stoch_simul".

Cuadro 2.10: Macro-lenguaje vs Matlab para análisis de sensibilidad

Macro-lenguaje	Matlab
rhos = [0.8, 0.9, 1];	rhos = [0.8, 0.9, 1];
@♯for i in 1:3	for i = 1:length(rhos)
rho = rhos(@i);	rho = rhos(i);
stoch_simul(order=1);	stoch_simul(order=1);
save oo_ = oo_;	save oo_ = oo_;
@♯endfor	end

2.3.11. Formas de escribir el modelo en Dynare

Una ventaja de Dynare es que se puede escribir el mismo modelo en diferentes formas. En primer lugar se puede escribir el modelo nolineal y esperar que Dynare lo linealice o se puede escribir directamente el modelo linealizado por el usuario. En segundo lugar, la variable se puede introducir en niveles o en logarítmo. Esto es importante porque cuando Dynare linealice el sistema o el usuario escriba el sistema linealizado los coeficientes de la función de política y de estado se leen como elasticidades. En la siguiente sección se utilizará el modelo de Long y Plosser (1983) para ilustrar los comandos antes descritos, para ello se considera cuatro formar de escribir este modelo en Dynare. El objetivo de esto último es ver las diferencias entre ellos en cuanto a la solución, la función impulso-respuesta y los momentos.

En el cuadro [2.11] se describe los cuatro archivos .mod que reflejan las cuatro formas distintas de ingresar o escribir un modelo en Dynare. Como se mencionó previamente, los cuatro archivos contienen el mismo modelo.

Cuadro 2.11: Cuatro formas de escribir un modelo en Dynare

Modelo (.mod)	Descripción
Long_Plosser_Dynare_lineal_log.mod (mod1)	Este .mod contiene las ecuaciones log-lineales. Cabe resaltar que el valor de estado estacionario de cada variable log-lineal es igual a cero.
Long_Plosser_Dynare_lineal_niv.mod (mod2)	Este .mod contiene las ecuaciones lineales pero con las variables en niveles.
Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod (mod3)	Este .mod contiene las ecuaciones no-lineales y con las variables en logarítmo.
Long_Plosser_Dynare_nolineal_niv.mod (mod4)	Este .mod contiene las ecuaciones no-lineales y con las variables en niveles.

2.4. Modelo de Long y Plosser (1983): aplicación en Dynare

2.4.1. Modelo de Long y Plosser (1983)

Con el fin de aplicar los códigos de Dynare antes descritos en la solución y simulación de un modelo de equilibrio general, en esta sección se utilizará el modelo de Long y Plosser (1983), el cual es descrito en detalle en el capítulo 3. Además, es preciso mencionar que este modelo tiene dos supuestos importantes: el primero es que el capital se deprecia totalmente en cada periodo, y el segundo es que la utilidad es logarítmica en el consumo y el ocio. En el cuadro [2.12] se describe el problema de optimización de la familia y de la empresa.

Cuadro 2.12: Problema de optimización de los agentes

Familias	**Empresas**
$\underset{\{c_t,h_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \big[ln(c_t) + \theta ln(1-h_t)\big]$	$\underset{\{k_t,l_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \quad \pi_t = y_t - [w_t h_t +$
$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t + \pi_t$	$r_t k_t]$ $y_t = a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha}$
$k_{t+1} = i_t$	

En cada problema de optimización se obtiene condiciones de primer orden que reflejan el comportamiento de cada agente. En conjunto estas reglas de comportamiento conforman un sistema de ecuaciones no lineales estocástica, las cuales se describen en el cuadro [2.13].

Estas nolinealidades hace difícil su solución. El camino usual para reducir la complejidad de este sistema de ecuaciones es obteniendo una apróximación de primer orden por medio de la expansión de Taylor, la cual es llamada linealización. Como se menciona en el capítulo 3, existe dos formas de linealizar el sistema de ecuaciones. La primera es considerando la variable en niveles y la segunda es considerando la variable en logarítmo. El

Cuadro 2.13: Sistema de ecuaciones no lineal del modelo (Long y Plosser, 1983)

Agente	Ecuaciones	Descripción
Familia	$\frac{1}{c_t} = \beta E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}} r_{t+1}\right]$	Ecuación de Euler
	$k_{t+1} = i_t$	Ley de movimiento del capital
	$\frac{\theta}{1-h_t} = \frac{w_t}{c_t}$	Oferta de trabajo
Empresa	$y_t = a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha}$	Función de producción
	$r_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{k_t}$	Demanda del capital
	$w_t = \alpha\frac{y_t}{h_t}$	Demanda de trabajo
Equilibrio	$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
Choque	$lna_t = \phi lna_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

cuadro [2.14] muestra las ecuaciones luego de linealizar el modelo considerando las variables en niveles, donde para el caso del consumo se tiene: $\widetilde{c}_t = c_t - c_{ss}$.

De otro lado, el cuadro [2.15] muestra las ecuaciones linealizadas considerando las variables en logarítmo. En este enfoque el cambio de variable, por ejemplo para el consumo, sigue la siguiente forma: $\widehat{c}_t = lnc_t - lnc_{ss}$.

Cuadro 2.14: Sistema de ecuaciones lineal del modelo (Long y Plosser, 1983)

Agente	Ecuaciones	Descripción
Familia	$\widetilde{c}_t = \beta E_t(r_{ss}\widetilde{c}_{t+1} - c_{ss}\widetilde{r}_{t+1})$	Ecuación de Euler
	$\widetilde{k}_{t+1} = \widetilde{i}_t$	Ley de movimiento del capital
	$\widetilde{w}_t = \frac{w_{ss}}{(1-h_{ss})}\widetilde{h}_t + \frac{\theta}{1-h_{ss}}\widetilde{c}_t$	Oferta de trabajo
Empresa	$\widetilde{y}_t = \frac{y_{ss}}{a_{ss}}\widetilde{a}_t + (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\widetilde{k}_t + \alpha\frac{y_{ss}}{a_{ss}}\widetilde{h}_t$	Función de producción
	$\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\widetilde{k}_t = \widetilde{y}_t - \frac{k_{ss}}{1-\alpha}\widetilde{r}_t$	Demanda del capital
	$\widetilde{w}_t = \left(\frac{\alpha}{h_{ss}}\right)\widetilde{y}_t - \left(\frac{\alpha y_{ss}}{h_{ss}^2}\right)\widetilde{h}_t$	Demanda de trabajo
Equilibrio	$\widetilde{y}_t = \widetilde{c}_t + \widetilde{i}_t$	Equilibrio mercado de bienes
Choque	$\widetilde{a}_t = \phi\widetilde{a}_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

En el cuadro [2.16] se muestra los valores que toman los parámetros del modelo, la cual está basada en King y Rebelo (2000). Cabe mencionar que estos parámetros se han obtenido considerando que los datos son trimestrales. Por tanto, cada periodo en el modelo sea en la simulación como en la función impulso-respuesta se entiende como un trimestre.

En el cuadro [2.17] se menciona el estado estacionario de cada variable. Para calcular este equilibrio de largo plazo se asume que la variable es la misma independientemente de la temporalidad; es decir, $x_t = x_{t+1}$. En ese sentido, todos los rezagos y adelantos presentes en el sistema de ecuaciones que reflejan el modelo desaparece. Es en este escenario donde

Cuadro 2.15: Sistema de ecuaciones log-lineal del modelo (Long y Plosser, 1983)

	Ecuaciones log-lineal	Descripción
[1]	$\widehat{c}_t = E_t\left[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{r}_{t+1}\right]$	Ecuación de Euler
[2]	$\widehat{k}_{t+1} = \widehat{i}_t$	Ley de movimiento del capital
[3]	$\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t = \widehat{w}_t - \widehat{c}_t$	Oferta de trabajo
[4]	$\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + \alpha\widehat{h}_t$	Función de producción
[5]	$\widehat{r}_t = \widehat{y}_t - \widehat{k}_t$	Demanda de capital
[6]	$\widehat{w}_t = \widehat{y}_t - \widehat{h}_t$	Demanda de trabajo
[7]	$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t$	Equilibrio en el mercado de bienes
[8]	$\widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

Nota: Para obtener directamente la solución del modelo con Dynare se puede utilizar el archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

se calcula el estado estacionario para cada variable, el cual finalmente depende de los parámetros del modelo. El detalle de cómo se llegó a cada expresión se encuentra en el capítulo 3.

Cuadro 2.16: Calibración

Parámetro	**Observación**
$\alpha = 0.667$	Proporción de largo plazo del trabajo en el ingreso nacional
$\theta = 3.968$	Calibrado para que el trabajo en estado estacionario sea igual a 20 %
$\rho = 0.979$	Persistencia del choque
$\beta = 0.984$	Factor de descuento
$\sigma_e = 0.0072$	Desviación estándar del choque de productividad

2.4.2. Preambulo

Definición de variables endógenas: en el cuadro [2.18] se describe la declaración de las variables endógenas en cada uno de los archivos .mod. De este cuadro se desprende cuatro conclusiones. La primera es que en el [mod1] cada variable declarada es la variable que aparece en el modelo no-lineal. Por ejemplo "c" representa el consumo en periodo "t".

La segunda es que en el [mod2] cada variable declarada representa el logarítmo neperiano de la variable. Por ejemplo "cc" es igual al "lnc_t". Cabe mencionar que el [mod1] y [mod2] contienen al modelo no-lineal. La tercera es que en el [mod3] cada variable declarada representa la desviación de la variable con respecto a su estado estacionario. Por ejemplo "ct" es igual al "$c_t - c_{ss}$". Cabe mencionar que "ct" es una forma de representar $\widetilde{c}_t$, tal como aparece en el modelo linealizado en niveles (ver el cuadro [2.14]).

Además, una cuarta conclusión es que en el [mod4] cada variable declarada representa la desviación del logarítmo de la variable con respecto al logarítmo de su estado estaciona-

Cuadro 2.17: Estado estacionario

Estado estacionario (forma recursiva)	Estado estacionario (forma paramétrica)
$r_{ss} = \frac{1}{\beta}$	$= \frac{1}{\beta}$
$h_{ss} = \frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}$	$= \frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}$
$a_{ss} = 1$	$= 1$
$k_{ss} = h_{ss}\big[\frac{1}{\beta(1-\alpha)}\big]^{-1/\alpha}$	$= \big[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\big]\big[\beta(1-\alpha)\big]^{1/\alpha}$
$i_{ss} = k_{ss}$	$= \big[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\big]\big[\beta(1-\alpha)\big]^{1/\alpha}$
$y_{ss} = k_{ss}\big[\frac{1}{\beta(1-\alpha)}\big]$	$= \big[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\big]\big[\beta(1-\alpha)\big]^{\frac{1}{\alpha}-1}$
$c_{ss} = k_{ss}\big[\frac{1}{\beta(1-\alpha)} - 1\big]$	$= \big[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\big]\big[\beta(1-\alpha)\big]^{1/\alpha}\big[\frac{1}{\beta(1-\alpha)} - 1\big]$
$w_{ss} = \alpha\frac{y_{ss}}{h_{ss}}$	$= \alpha\big[\beta(1-\alpha)\big]^{\frac{1}{\alpha}-1}$

Nota: El cálculo de los estados estacionarios se encuentran en Long_Plosser.m (sección 2) (ver el capítulo 3).

rio. Por ejemplo "ch" es igual al "$lnc_t - lnc_{ss}$". De igual forma que en el [mod3], "ch" es una forma de representar $\widehat{c}_t$, tal como aparece en el modelo log-linealizado (ver el cuadro [2.15]).

Asimismo, es importante mencionar que el número de variables declaradas es el mismo que el número de ecuaciones que se escribirá en el bloque `model`. Finalmente, la productividad en Dynare se declara como una variable endógena y es el choque ϵ_t el que se declara como exógena.

Cuadro 2.18: Declaración de variables endógenas

Modelo no-lineal		Modelo lineal	
Variable en niveles (mod1)	Variable en logarítmo (mod2)	Variable en niveles (mod3)	Variable en logarítmo (mod4)
var	var	var	var
c	cc	ct	ch
i	ii	it	ih
y	yy	yt	yh
k	kk	kt	kh
h	hh	ht	hh
r	rr	rt	rh
w	ww	wt	wh
a	aa	at	ah
;	;	;	;

Definición de variables exógenas: la única variable exógena es la perturbación (error) de la productividad ϵ_t. La forma de introducirlo en el archivo .mod es similar entre las cuatro versiones.

varexo e e_t (long_name = 'Choque de productividad');

Donde: e_t es el nombre que tomará a variable en formato LaTeX, y (long_name =

'Choque de productividad') es el nombre "largo" que se asigna a la variable.

Definición de parámetros: en el cuadro [2.19] se describe la definición de los parámetros, la cual es similar en los cuatro archivos .mod. Cabe mencionar que no solo se indica los parámetros asociados a las ecuaciones como la función de producción por ejemplo, sino que también se define como parámetro a los valores de estado estacionario.

Cuadro 2.19: Declaración de los parámetros

parameters	
theta	$ \theta$ (long_name = 'peso del ocio en la función de utilidad')
beta	$ \beta$ (long_name = 'factor de descuento')
alpha	$ \alpha$ (long_name = 'participación del trabajo en el ingreso nacional')
rho	$ \rho$ (long_name = 'persistencia del choque')
sigma_ee	$ \sigma_e$ (long_name = 'des. est. del choque')
y_ss	
c_ss	
i_ss	
w_ss	
r_ss	
k_ss	
h_ss	
a_ss	
;	

Nota: Esta declaración de parámetros pertenece al Mod1.

Luego de definir los parámetros es necesario indicarle a Dynare los valores de cada parámetro (calibración) incluyendo los valores del estado estacionario. Esto es importante porque en el modelo lineal usualmente aparece de forma multiplicativa o aditiva el valor del estado estacionar io de algunas variables y además porque estos estados estacionarios se colocan en el bloque de valores iniciales. En el cuadro [2.20] se describe la forma de introducir los valores de los parámetros en Dynare. Estos códigos se escriben después del bloque de parámetros y antes del bloque del modelo.

¿Donde guarda Dynare la información acerca de las variables y los parámetros? Dynare, luego de leer el archivo .mod, crea una variable en el *workspace* de Matlab: M_, en la cual guarda información del modelo. Bajo la categorización de las variables de Matlab, esta variable es una **estructura**; es decir, puede contener otras variables, como numéricas (matrices y vectores), lógicas y de cadena de caracteres (texto), inclusive puede contener otra estructura.

En la figura [2.4] se observa que la variable M_ contiene un conjunto amplio de otras variables. En este apartado se menciona aquellas en que Dynare guarda el nombre de las variables y de los parámetros del modelo. Cabe mencionar que dado que estas variables de Matlab guardan texto (nombres), entonces bajo la tipologia de Matlab son variables de "cadena de caracteres (char)".

- **Variable asociada al nombre del modelo:** "fname" es una variable la cual contiene el nombre del archivo .mod.

Cuadro 2.20: Declaración de los valores de los parámetros

Para (mod1) al (mod4)
h_ss=0.2;
beta=0.984;
alpha=0.667;
rho=0.979;
sigma_ee=0.0072;
theta=alpha*(1-h_ss)/(h_ss*(1-beta*(1-alpha)));
r_ss=1/beta;
a_ss=1;
k_ss=h_ss*(1/(beta*(1-alpha)))^(-1/alpha);
i_ss=k_ss;
y_ss=k_ss*(1/(beta*(1-alpha)));
c_ss=k_ss*(1/(beta*(1-alpha))-1);
w_ss=alpha*y_ss/h_ss;

Figura 2.4: Estructura M_

M_ <1x1 struct>

Field	Value	Min	Class
fname	'Long_Plosser_Dynare_nolineal_log'		char
bvar	[]		double
params	<13x1 double>	0.0072	double
endo_histval	[]		double
Correlation_matrix	1	1	double
Correlation_matrix_ME	1	1	double
exo_names	'e'		char
exo_names_tex	'e_t'		char
exo_names_long	'Choque de productividad'		char
endo_names	<8x2 char>		char
endo_names_tex	<8x6 char>		char
endo_names_long	<8x23 char>		char
param_names	<13x8 char>		char
param_names_tex	<13x8 char>		char
param_names_long	<13x48 char>		char

Nota: Esta estructura M_ se obtiene del archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

- **Variables asociadas a la variable exógena:** en este caso existen tres variables. La primera es "exo_names", la cual contiene el nombre de la variable exógena. La segunda es "exo_names_tex", que contiene el nombre que la variable tomará en formato LaTeX; finalmente, "exo_names_long" que contiene los nombres extendidos de las variables exógenas.

- **Variables asociadas a la variable endógena:** al igual que en el caso de la variable exógena, también existen tres variables para la variable endógena. La primera es "endo_names", la cual contiene el nombre de las variables endógenas. La segunda es "endo_names_tex", que contiene el nombre que la variables tomará en formato LaTeX; finalmente, "endo_names_long" que contiene los nombres extendidos de las variables endógeas.

- **Variables asociadas a los parámetros:** en este caso existen cuatro variables. Una

de ellas es "params", la cual contiene los valores de los parámetros (en el mismo orden con que se ha escrito en el bloque `parameters` en el .mod); las tres variables restantes están asociadas a los nombres de los parámetros: la primera es "param_names", la cual contiene el nombre de los parámetros. La segunda es "param_names_tex", que contiene el nombre que los parámetros tomará en formato LaTeX; finalmente, "param_names_long" que contiene los nombres extendidos de los parámetros.

Cabe mencionar que para extraer alguna variable que se encuentra dentro de la estructura M_ basta escribir en el *Command Window* de Matlab: "M_.NombreVariable". Por ejemplo si se desea extraer el nombre del archivo .mod se escribe lo siguiente:

>> M_.fname

Esto mostrará:

ans =
Long_Plosser_Dynare_nolineal_log

Quiza se requiera extraer la versión larga de los nombres de las variables endógenas, entonces se escribe en el *Command Window* de Matlab lo siguiente:

>> M_.endo_names_long

Esto mostrará:

ans =
Ln Consumo
Ln Inversión
Ln Producto
Ln Capital
Ln Trabajo
Ln Tasa de interés real
Ln Salario real
Ln Productividad

Es importante mencionar que una de las variables que tiene la estructura M_ es Sigma_e. Esta es una variable especial de Dynare y no se puede usar este nombre para definir otra variable en el archivo .mod (por ejemplo la desviación estándar del choque). Sigma_e es la matriz de varianza-covarianza del choque estocástico y se escribe como una matriz triangular superior o inferior. Por ejemplo para el modelo no-lineal con variable en logarítmo (mod2), Sigma_e = 0.00005184. Lo cual corresponde a la varianza del choque. Cómo en el archivo .mod se ha definido que la desviación estándar del choque es sigma_ee = 0.0072, entonces la varianza es 0.00005184, lo cual Dynare calcula y guarda en Sigma_e (variable de la estructura M_).

2.4.3. Modelo

En el cuadro [2.21] se menciona la forma de escribir en Dynare el modelo no-lineal considerando las variables en niveles o variables en logarítmo. De este cuadro se desprende algunos comentarios generales que son transversales para cualquier modelo:

- **Definición del tiempo:** es importante mencionar cómo Dynare considera el "tiempo". En primer lugar cuando se escribe una variable en Dynare en "t" solo se coloca la variable. Por ejemplo "c" representa c_t. Si se desea escribir una variable adelantada en un periodo se escribe "c(+1)", la cual representa c_{t+1}.
- **Variables de control:** Dynare considera que las variable de control están escritas en "t" y que las variables acompañadas por (+1) son *forward looking*. En este caso no es necesario escribir las expectativas porque Dynare entiende que cualquier variable escrita en (+1) siempre lleva acompañado el operador de expectativas E_t. Por ejemplo, la ecuación de Euler descrita en el cuadro [2.21] no lleva el operador expectativas.
- **Variable de estado:** es importante mencionar que el capital, en este modelo, es una variable de estado; es decir, en "t" ya está determinada. Entonces el capital en "t+1" es k_{t+1}, la cual fue determinada en "t". Por tanto, cuando se escriba en Dynare se debe de colocar "k" para representar k_{t+1}, y cuando en una ecuación aparezca k_t se debe de escribir en Dynare como "k(-1)". Esto se puede observar en la demanda de capital y la función de producción en el cuadro [2.21]. Por ejemplo: la función de producción es $y_t = a_t k_t^{\alpha-1} h_t^{\alpha}$, la cual se escribe en Dynare como: y=a*((k(-1))^(1-alpha))*h^(alpha).

Cuadro 2.21: Declaración del modelo no-lineal

Variables en niveles (mod1)	Variables en logarítmo (mod2)
model;	model;
1/c=beta*(1/c(+1))*(r(+1));	1/exp(cc)=beta*(1/exp(cc(+1)))*(exp(rr(+1)));
k=i;	exp(kk)=exp(ii);
theta/(1-h)=w/c;	theta/(1-exp(hh))=exp(ww)/exp(cc);
y=a*((k(-1))^(1-alpha))*h^(alpha);	exp(yy)=exp(aa)*((exp(kk(-1)))^(1-alpha))*exp(hh)^(alpha);
r=(1-alpha)*y/k(-1);	exp(rr)=(1-alpha)*exp(yy)/exp(kk(-1));
w=(alpha)*y/h;	exp(ww)=(alpha)*exp(yy)/exp(hh);
y=c+i;	exp(yy)=exp(cc)+exp(ii);
ln(a)=rho*ln(a(-1))+e;	aa=rho*aa(-1)+e;
end;	end;

Además de lo anterior, del cuadro [2.21] se pueden desprender algunas conclusiones específicas:

- **Modelo no-lineal con variables en niveles (mod1):** en este caso la variable que representa el consumo es "c", lo cual es similar para las demás variables. Las ecuaciones están escritas de la misma forma que en el *papel*; es decir, son las relaciones de primer orden no lineales que surgen de la optimización. Cuando a Dynare se le pida que realice la linealización creará la variable $x = x - x_{ss}$.

- **Modelo no-lineal con variables en logarítmo (mod2):** en este caso en Dynare se define la variable "ln x" como "xx". Esto se realiza con el fin de considerar las variables en logarítmos. Entonces, en cada ecuación del sistema no-lineal en lugar de escribir "x" se reescribe dicha variable como "exp(ln x)", la cual brinda el mismo "x". Pero se sabe que "xx = ln x", entonces "exp(ln x)" se convierte en "exp(xx)". Esta última expresión es lo que se escribe en Dynare para cada variable. Cuando a Dynare se le pida que realice la linealización creará la variable $xx = xx - xx_{ss} = lnx - lnx_{ss}$.

Con respecto a la versión lineal del modelo, el cuadro [2.22] muestra las dos alternativas de linealizar el modelo: en niveles (mod3) o en logarítmo (mod4). Cabe mencionar que esta linealización la realiza previamente el usuario y luego escribre el modelo linealizado en Dynare; en este caso Dynare ya no aplicará la apróximación de primer orden de Taylor sobre el modelo. Esto es diferente a los dos modelos previos donde el usuario escribía el modelo no-linal y solo cambiada la naturaleza de la variable (lineal o logarítmica). Del cuadro [2.22] se desprende algunas consideraciones:

- **Modelo lineal:** cuando se desea escribir un modelo linealizado en Dynare se debe de colocar la opción `linear` en el bloque `model`. Esto se hace de la siguiente manera: `model (linear); . . . end;`

- **Modelo lineal con variable en niveles (mod3):** en este caso se ha definido la variable $xt = x - x_{ss}$, esta variable es la que representa la variable $\widetilde{x}_t$ del cuadro [2.14].

- **Modelo lineal con variable en logarítmo (mod4):** en este caso se ha definido la variable $xh = lnx - lnx_{ss}$, esta variable es la que representa la variable $\widehat{x}_t$ del cuadro [2.15].

Una diferencia importante de las ecuaciones entre el modelo no-lineal y linealizado es que en este último los valores de estado estacionario están presentes en las ecuaciones.

Cuadro 2.22: Declaración del modelo lineal

Variables en niveles (mod3)	Variables en logarítmo (mod4)
model(linear);	model(linear);
ct=beta*(r_ss*ct(+1)-c_ss*rt(+1));	ch=ch(+1)-rh(+1);
kt=it;	(h_ss/(1-h_ss))*hh=wh-ch;
wt=(w_ss/(1-h_ss))*ht+(theta/(1-h_ss))*ct;	kh=ih;
yt=(y_ss/a_ss)*at+(1-alpha)*(y_ss/k_ss)*kt(-1)	yh=ah+(1-alpha)*kh(-1)+alpha*hh;
+alpha*(y_ss/h_ss)*ht;	
(y_ss/k_ss)*kt(-1)=yt-(k_ss/(1-alpha))*rt;	rh=yh-kh(-1);
wt=(alpha/h_ss)*yt-((alpha*y_ss)/(h_ss)^2)*ht;	wh=yh-hh;
yt=ct+it;	yh=(c_ss/y_ss)*ch+(i_ss/y_ss)*ih;
at=rho*at(-1)+e;	ah=rho*ah(-1)+e;
end;	end;

2.4.4. Valores iniciales

Los valores iniciales son importantes porque son el punto de partida que Dynare utiliza para calcular el estado estacionario por medio de aproximaciones sucesivas. Usualmente primero calculamos el estado estacionario manualmente para luego introducirlo en el bloque de valores iniciales. El cuadro [2.23] contiene lo forma de ingresar los valores iniciales en Dynare según el tipo de modelo que estamos utilizando. De este cuadro se desprende las siguientes conclusiones:

- **Modelo no-lineal con variables en niveles:** en esta forma de escribir el modelo, el valor inicial de cada variable es el estado estacionario que previamente se ha definido en el bloque de parámetros "`parameters`", y que luego se ha calculado (ver el cuadro [2.20]).
- **Modelo no-lineal con variables en logarítmo:** debido a que la variable que se ha definido es el logarítmo de ella misma (xx = ln x), entonces en los valores iniciales se coloca "$xx = lnx_{ss}$". Cabe mencionar que en Matlab el logarítmo neperiano (ln) se escribe como "log".
- **Modelo lineal con variables en niveles:** dado que la variable definida es "$xt = x - x_{ss}$", entonces en el bloque de valores iniciales se coloca: $xt = x_{ss} - x_{ss}$, entonces $xt = 0$.
- **Modelo lineal con variables en logarítmo:** de manera similar al caso anterior, dado que la variable definida es "$xh = lnx - lnx_{ss}$", entonces el estado estacionario: "$xh = lnx_{ss} - lnx_{ss}$", lo cual lleva a que $xh = 0$, siendo este valor lo que se coloca en el bloque de valores iniciales para todas las variables.

Cuadro 2.23: Declaración de los valores iniciales

Modelo no-lineal		Modelo lineal	
Variables en niveles (mod1)	Variables en logarítmo (mod2)	Variables en niveles (mod3)	Variables en logarítmo (mod4)
initval;	initval;	initval;	initval;
h =h_ss;	hh =log(h_ss);	ht =0;	hh =0;
k =k_ss;	kk =log(k_ss);	kt =0;	kh =0;
i =i_ss;	ii =log(i_ss);	it =0;	ih =0;
c =c_ss;	cc =log(c_ss);	ct =0;	ch =0;
w =w_ss;	ww =log(w_ss);	wt =0;	wh =0;
r =r_ss;	rr =log(r_ss);	rt =0;	rh =0;
y =y_ss;	yy =log(y_ss);	yt =0;	yh =0;
a =a_ss;	aa =log(a_ss);	at =0;	ah =0;
end;	end;	end;	end;

Resid: este comando, que se coloca después del bloque de valores iniciales, calcula el residuo en cada ecuación cuando se reemplaza cada variable por su valor inicial; es decir, coloca los valores iniciales en cada ecuación y calcula el residuo entre la expresión de la derecha menos la expresión de la izquierda; por ejemplo para la función de producción:

$$F = y_t - a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha}$$

En estado estacionario:

$$F = y - a k^{1-\alpha} h^{\alpha}$$

Lo que hace Dynare es colocar los valores iniciales en esta ecuación y calcular el residuo (F). Si este residuo es cero significa que los valores inciales que se ha introducido son exactamente los correctos; es decir, hemos calculado correctamente el estado estacionario. Puede ser que el residuo sea diferente de cero, lo cual indica que nos hemos equivocado en el cálculo del estado estacionario, y aún así Dynare encuentre el verdadero valor del estado estacionario. Esto se debe a que Dynare necesita un punto de partida cercano al verdadero valor del estado estacionario y con ello empezar a iterar. Luego de calcular el estado estacionario, Dynare mostrará dichos valores en el *prompt* de Matlab, el cual se encuentra en cuadro [2.24].

Además, el cuadro [2.24], que corresponde al modelo no-lineal con variables en logarítmo, indica que los valores iniciales (estado estacionario calculado) que se ha considerado son exactamente los estados estacionarios correctos del modelo; por ello, el residuo de cada ecuación es igual a cero. Si no hemos colocado bien los valores iniciales Dynare mostrará que el residuo es diferente de cero en algunas ecuaciones, lo cual nos brinda información para detectar en qué variable no hemos calculado el estado estacionario correctamente. Si el residuo es muy grande significa que los valores iniciales son muy ditintos o muy lejanos del estado estacionario y Dynare podría parar el proceso debido a que no logrará encontrar el estado estacionario desde el punto inicial dado.

Cuadro 2.24: El comando Resid: resultados

Residuals of the static equations:
Equation number 1 : 0
Equation number 2 : 0
Equation number 3 : 0
Equation number 4 : 0
Equation number 5 : 0
Equation number 6 : 0
Equation number 7 : 0
Equation number 8 : 0

2.4.5. Estado estacionario

El cuadro [2.25] muestra los resultados de aplicar el comando `steady;`. De este cuadro se desprende algunas conclusiones:

- **Modelo no-lineal con variables en logarítmo (mod2):** recordemos que en este modelo las variables están expresadas en logarítmo. Por ejemplo, el logarítmo del consumo está representado por “cc”; es decir, $cc = lnc$. Entonces en estado estacionario se tiene que $cc_{ss} = lnc_{ss}$. Considerando que $cc_{ss} = -2.56348$, entonces

$c_{ss} = exp(-2.56348) = 0.0770361$. De la misma manera se hace con las demás variables.

- **Modelo lineal:** en caso del modelo lineal con variables en niveles (mod3), se sabe que cada variable está expresada como la diferencia entre su nivel y su estado estacionario. Por ejemplo, para el consumo se tiene $ct = c - c_{ss}$. Evaluando la variable en estado estacionario se tiene: $ct_{ss} = c_{ss} - c_{ss} = 0$. De manera similar se tiene para el modelo lineal con variables en logarítmo (mod4). Por ejemplo, para el consumo se tiene: $ch = lnc - lnc_{ss}$. Al evaluar esta variable en estado estacionario: $ch_{ss} = c_{ss} - c_{ss} = 0$.

Cuadro 2.25: Estado Estacionario

Modelo No-Lineal				Modelo Lineal			
Variables en niveles (mod1)		variables en logarítmo (mod2)		Variables en niveles (mod3)		Variables en logarítmo (mod4)	
c	0.0770361	cc	-2.56348	ct	0	ch	0
i	0.037545	ii	-3.28221	it	0	ih	0
y	0.114581	yy	-2.16647	yt	0	yh	0
k	0.037545	kk	-3.28221	kt	0	kh	0
h	0.2	hh	-1.60944	ht	0	hh	0
r	1.01626	rr	0.0161294	rt	0	rh	0
w	0.382128	ww	-0.962	wt	0	wh	0
a	1	aa	0	at	0	ah	0

¿Dónde guarda los estado estacionarios Dynare?
Dynare crea una variable estructura (similar a M_) llamada oo_, en la cual guarda las simulaciones, el estado estacionario, los momentos de las variables endógenas (media, varianza y autocorrelación) y la función impulso-respuesta de cada variable. En la figura [2.5] se muestra todas las variables que tiene la estructura oo_.

En particular, la variable que contiene los estados estacionarios calculados por Dynare es "oo_steady_state" (ver la figura [2.6]).

2.4.6. Definición del choque

Para los cuatro archivos .mod se define de manera similar el choque. El cuadro [2.26] muestra cómo se escribe en Dynare la varianza del choque de productividad.

Cuadro 2.26: Definición del choque

```
shocks;
var e = (sigma_ee)^2;
end;
```

Figura 2.5: Estructura oo_

oo_ <1x1 struct>

Field	Value	Min	Class
exo_simul	[0;0;0]	0	double
endo_simul	[ ]		double
dr	<1x1 struct>		struct
exo_steady_state	0	0	double
exo_det_steady_state	[ ]		double
exo_det_simul	[ ]		double
steady_state	[-2.5635;-3.2822;-2.1665;-3.2822;-1.609...	-3.2822	double
gamma_y	<6x1 cell>		cell
mean	[-2.5635;-3.2822;-2.1665;-3.2822;-1.609...	-3.2822	double
var	<8x8 double>	0	double
autocorr	<1x5 cell>		cell
irfs	<1x1 struct>		struct

Nota: Esta estructura oo_ se obtiene del archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

Figura 2.6: oo_.steady_state

oo_.steady_state <8x1 double>

	1	2
1	-2.5635	
2	-3.2822	
3	-2.1665	
4	-3.2822	
5	-1.6094	
6	0.0161	
7	-0.9620	
8	0	

Nota: Esta variable oo_.steady_state se obtiene del archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

2.4.7. Evaluación del modelo

Para evaluar el modelo se coloca el código `check;`, el resultado de este comando es el vector de eigenvalores de la matriz F. Esta matriz se obtiene de escribir el modelo (sistema de ecuaciones lineales) en forma de estado-espacio. La ecuación (2.1) refleja la versión estado-espacio del modelo. En el capítulo 3 se describe cómo se obtiene esta ecuación en mayor detalle.

$$\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_t Y_{t+1} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + GV_{t+1} \tag{2.1}$$

En el cuadro [2.27] se escribe el vector de eigenvalores de cada modelo; además, Dynare muestra un mensaje que indica si el modelo cumple la condición de Blanchard y Kahn. Por ejemplo en el mod1 se observa que existen cuatro eigenvalores cuyos módulos son: 0.333, 0.979, 3.052 y ∞. De estos cuatro módulos, dos son mayores a uno. De otro lado, el

modelo tiene dos variables *forward looking* c_{t+1} y r_{t+1}. Por tanto se cumple la condición de Blanchard y Kahn la cual indica que si el número de eigenvalores cuyo módulo es mayor a uno es igual al número de variables *forward looking*, entonces el sistema tiene solución única. Este es el mensaje que Dynare imprime en pantalla.

Cuadro 2.27: Eigenvalores

Modelo No-Lineal					
Variables en niveles (mod1)			Variables en logaritmos (mod2)		
Modulo	Real	Imaginario	Modulo	Real	Imaginario
0.333	0.333	0	0.333	0.333	0
0.979	0.979	0	0.979	0.979	0
3.052	3.052	0	3.052	3.052	0
Inf	-Inf	0	9.84E+15	-9.84E+15	0
Hay dos eigenvalores mayores que 1 en módulo para 2 variables forward-looking La condición de rango es verificada			Hay dos eigenvalores mayores que 1 en módulo para 2 variables forward-looking La condición de rango es verificada		
Modelo Lineal					
Variables en niveles (mod3)			Variables en logaritmos (mod4)		
Modulo	Real	Imaginario	Modulo	Real	Imaginario
0.333	0.333	0	0.333	0.333	0
0.979	0.979	0	0.979	0.979	0
3.052	3.052	0	3.052	3.052	0
4.59E+17	4.59E+17	0	Inf	-Inf	0
Hay dos eigenvalores mayores que 1 en módulo para 2 variables forward-looking La condición de rango es verificada			Hay dos eigenvalores mayores que 1 en módulo para 2 variables forward-looking La condición de rango es verificada		

¿Dónde guarda Dynare el vector de eigenvalores?
Dentro de la estructura oo_ que Dynare crea cuando procesa el modelo se encuentra la estructura oo_.dr. Esta estructura guarda dos variables importantes: los eigenvalores y la regla de decisión; es decir, la solución del modelo. En la figura [2.7] se muestra las variables que contiene oo_.dr.

La figura [2.8] muestra la variable oo_.dr.eigval, la cual contiene el vector de los eigenvalores.

2.4.8. Solución

En el cuadro [2.28] se muestra la solución del modelo (función de política y de estado) para los cuatro archivos .mod. Cabe mencionar que el código utilizado para obtener la solución es:

$$stoch_simul(order = 1, irf = 40);$$

Figura 2.7: Reglas de decisión (oo_.dr)

oo_.dr <1x1 struct>

Field	Value	Min	Class
eigval	[0.3330 + 0.0000i;0.9790 + 0.0000i;3.051...	0.3330	double (co...
order_var	[2;3;5;7;4;8;1;6]	1	double
inv_order_var	[7;1;2;5;3;8;4;6]	1	double
kstate	<4x4 double>	0	double
transition_auxiliary_vari...	[ ]		double
ys	[-2.5635;-3.2822;-2.1665;-3.2822;-1.609...	-3.2822	double
ghx	<8x2 double>	-0.6670	double
ghu	[1.0000;1.0000;2.5432e-14;1.0000;1.0000...	2.5432...	double
state_var	[4 8]	4	double
gx	[0.3330 0.9790;-0.6670 0.9790]	-0.6670	double
Gy	[0.3330 0.9790;0 0.9790]	0	double

Nota: Esta estructura oo_.dr se obtiene del archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

Figura 2.8: oo_.dr.eigval

oo_.dr.eigval <4x1 complex double>

	1	2	3
1	0.3330		
2	0.9790		
3	3.0518		
4	-9.8365e+15		
5			

Nota: Este vector oo_.dr.eigval se obtiene del archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

Donde: "order = 1" indica que el modelo debe ser aproximado por la expansión de Taylor de primer orden. Esta opción no opera cuando en el bloque del modelo se ha especificado que el modelo es lineal por medio de "`model(linear)`". Algunas observaciones emergen del cuadro [2.28]:

- **Modelo no-lineal con variable en niveles (mod1):** para el consumo "c" la solución es la siguiente:

$$c = 0.077 + 0.683k(-1) + 0.075a(-1) + 0.077\epsilon$$

Debido a que se le ha pedido a Dynare que linealice el sistema (`order=1`), lo cual permite obtener un sistema de ecuaciones como el cuadro [2.14], entonces la variable de estado k(-1) y exógena a(-1) están expresadas como desviaciones de su estado estacionario. Es decir: $k(-1) = k_t - k_{ss}$ y $a(-1) = a_{t-1} - a_{ss}$, entonces:

$$c_t = 0.077 + 0.683(k_t - k_{ss}) + 0.075(a_{t-1} - a_{ss}) + 0.077\epsilon_t$$

Cabe mencionar que la constante 0.077 es el valor de estado estacionario del consumo.

$$(c_t - 0.077) = 0.683(k_t - k_{ss}) + 0.075(a_{t-1} - a_{ss}) + 0.077\epsilon_t$$

Factorizando 0.077 de $(a_{t-1} - a_{ss})$ y e_t, se tiene:

$$(c_t - 0.077) = 0.683(k_t - k_{ss}) + 0.077(0.979(a_{t-1} - a_{ss}) + e_t)$$

Se sabe que en el modelo no-lineal la ecuación de la productividad es $lna_t = \rho lna_{t-1} + \epsilon_t$; sin embargo, al solicitar a Dynare que linealice el sistema, esta ecuación es transformada en: $\widetilde{a}_t = 0.979\widetilde{a}_{t-1} + e_t$, donde $\widetilde{a}_t = a_t - a_{ss}$. Por tanto reemplazando esta expresión en la ecuación anterior:

$$\underbrace{(c_t - 0.077)}_{\widetilde{c}_t} = 0.683\widetilde{k}_t + 0.077\widetilde{a}_t$$

$$\widetilde{c}_t = 0.683\widetilde{k}_t + 0.077\widetilde{a}_t$$

Esta es la función de política del consumo (expresada en desviaciones de su estado estacionario): $\widetilde{c}_t = F(\widetilde{k}_t, \widetilde{a}_t)$. Los coeficientes se leen de la siguiente manera: un incremento en una unidad en $\widetilde{k}_t$ (manteniendo lo demás constante) produce un incremento de $\widetilde{c}_t$ en 0.683 unidades; es decir, si el capital de hoy se aleja en una unidad con respecto a su estado estacionario, el consumo se aleja en 0.683 unidades con respecto a su estado estacionario. Estos coeficientes permiten calcular en unidades la desviación de las variables con respecto a su estado estacionario; sin embargo, una medida más apropiada sería considerar dicha desviación en términos porcentuales. Para ello se puede realizar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(c_t - 0.077) &= 0.683(k_t - k_{ss}) + 0.077(a_t - a_{ss}) + \epsilon_t \\
\frac{(c_t - 0.077)}{c_{ss}}c_{ss} &= 0.683\frac{(k_t - k_{ss})}{k_{ss}}k_{ss} + 0.077\frac{(a_t - a_{ss})}{a_{ss}}a_{ss} + \epsilon_t \\
\widehat{c}_t c_{ss} &= 0.683\widehat{k}_t k_{ss} + 0.077\widehat{a}_t a_{ss} + \epsilon_t \\
\widehat{c}_t c_{ss} &= 0.683 k_{ss}\widehat{k}_t + 0.077 a_{ss}\widehat{a}_t + \epsilon_t \\
\widehat{c}_t 0.077 &= 0.683 * 0.0375\widehat{k}_t + 0.077 * 1\widehat{a}_t + \epsilon_t \\
\widehat{c}_t 0.077 &= 0.0256\widehat{k}_t + 0.077\widehat{a}_t + \epsilon_t \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

De la ecuación (2.2) la variable $\widehat{x}_t$ se lee como la desviación **porcentual** de la variable con respecto a su estado estacionario. Entonces: un incremento en 1 % en $\widehat{k}_t$; es decir, que el capital se esta incrementando en 1 % con respecto a su estado estacionario, produce un incremento de (0.0256/0.077)*1 % = 0.333 % de $\widehat{c}_t$; es decir, que el consumo se desvía por encima de su estado estacionario en un 0.333 %.

- **Modelo no-lineal con variable en logarítmos (mod2):** en este caso la solución, por ejemplo, para el consumo es:

$$cc = -2.563 + 0.333kk(-1) + 0.979aa(-1) + e$$

Considerando que Dynare ha realizado la linealización tomando en cuenta que cada variable está expresada en logarítmo, entonces $cc_t = lnc_t$, pero la variable de estado y la variable exógena están expresadas como: $kk(-1) = lnk_t - lnk_{ss}$ y $aa(-1) = lna_{t-1} - lna_{ss}$.

$$lnc_t = -2.563 + 0.333(lnk_t - lnk_{ss}) + 0.979ln(lna_{t-1} - lna_{ss}) + e_t$$

La constante de esta ecuación corresponde al estado estacionario de la variable; es decir, $lnc_{ss} = -2.563$, entonces: $c_{ss} = exp(-2.563) = 0.077$, lo cual coincide con lo calculado en el primer modelo (mod1). Introduciendo esto en la ecuación previa:

$$\begin{aligned} lnc_t &= -2.563 + 0.333(lnk_t - lnk_{ss}) + 0.979(lna_{t-1} - lna_{ss}) + e_t \\ lnc_t - lnc_{ss} &= 0.333(lnk_t - lnk_{ss}) + 0.979(lna_{t-1} - lna_{ss}) + e_t \\ \widehat{c}_t &= 0.333\widehat{k}_t + \underbrace{0.979\widehat{a}_{t-1} + e_t}_{\widehat{a}_t} \\ \widehat{c}_t &= 0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \end{aligned} \tag{2.3}$$

En este caso los coeficientes son elasticidades; es decir, si el capital aumenta en 1 % con respecto a su estado estacionario (manteniendo lo demás constante), el consumo se incrementa en 0.333 % con respecto a su estado estacionario.

- **Modelo lineal:** con respecto al modelo lineal, se puede observar que tiene los mismos coeficientes que en el modelo no-lineal, el cual fue linealizado por Dynare. La principal diferencia es que cuando introducimos un modelo lineal en Dynare el estado estacionario es cero, por ello no aparece ningún intercepto en las ecuaciones del modelo lineal (mod3 y mod4).

De lo anterior, dos conclusiones son importante mencionar: la primera es que es preferible que en la función de política cada variable esté expresada en desviaciones porcentuales con respecto al estado estacionario; es decir, se prefiere variables en logarítmo. Esto se debe a que los coeficientes de la solución se entienden como elasticidades y porque permite tener una lectura sencilla de la función impulso-respuesta. La segunda es que sea que coloquemos el modelo no-lineal en Dynare o que lo hayamos linealizado y luego lo coloquemos en Dynare, los coeficientes de la función de política y de estado serán los mismos. Por ejemplo para las variables en niveles: el modelo no-lineal (mod1) y el lineal (mod3) tienen los mismos coeficientes. De manera similar para las variables en logarítmo (mod2 y mod4).

¿Dónde guarda Dynare los coeficientes de la función de política y de estado? Dynare guarda la función de política y de estado en varias variables dentro de la estructura "oo_.dr". Existen algunas consideraciones para capturar de manera correcta los coeficientes de estas funciones.

[1] Orden de las variables: el orden inicial de las variables tal como se escribió en el archivo .mod es el siguiente: c, i, y, k, h, r, w, a. Entonces el consumo tiene el primer lugar, mientras que la inversión el segundo lugar y así sucesivamente para las demás variables. Sin

Cuadro 2.28: Función de política y de estado

Modelo no-lineal: variables en niveles (mod1)								
	c	i	y	k	h	r	w	a
Constante	0.077	0.038	0.115	0.038	0.2	1.016	0.382	1
k(-1)	0.683	0.333	1.016	0.333	0	-18.054	3.389	0
a(-1)	0.075	0.037	0.112	0.037	0	0.995	0.374	0.979
e	0.077	0.038	0.115	0.038	0	1.016	0.382	1
Modelo no-lineal: variables en logarítmo (mod2)								
	cc	ii	yy	kk	hh	rr	ww	aa
Constante	-2.563	-3.282	-2.166	-3.282	-1.609	0.016	-0.962	0
kk(-1)	0.333	0.333	0.333	0.333	0	-0.667	0.333	0
aa(-1)	0.979	0.979	0.979	0.979	0	0.979	0.979	0.979
e	1	1	1	1	0	1	1	1
Modelo lineal: variables en niveles (mod3)								
	ct	it	yt	kt	ht	rt	wt	at
kt(-1)	0.683	0.333	1.016	0.333	0	-18.054	3.389	0
at(-1)	0.075	0.037	0.112	0.037	0	0.995	0.374	0.979
e	0.077	0.038	0.115	0.038	0	1.016	0.382	1
Modelo lineal: variables en logarítmo (mod4)								
	ch	ih	yh	kh	hh	rh	wh	ah
kh(-1)	0.333	0.333	0.333	0.333	0	-0.667	0.333	0
ah(-1)	0.979	0.979	0.979	0.979	0	0.979	0.979	0.979
e	1	1	1	1	0	1	1	1

Este cuadro ha sido construido en base a lo que muestra Dynare en el *prompt* de Matlab manteniendo el orden (inicial) de las variables que aparece en el .mod.

embargo, cuando Dynare resuelve el sistema reordena estas variables, guardando el nuevo orden en "oo_.dr.oder_var". Esta variable muestra un vector de números que contiene la nueva posición de las variables: 2, 3, 5, 7, 4, 8, 1, 6. Esto significa que la variable que estaba en la posición inicial 2 (que es la inversión) ahora está en el primer lugar. Por ejemplo, el consumo estaba inicialmente en la primera posición pero ahora aparece en la posición 7. Esto es importante porque los coeficientes de la solución corresponden a este nuevo orden. Entonces el vector de variable reordenado es:

$$\begin{array}{cccc}
\text{Posición inicial} & & \text{Posición reordenada} & \\
\begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{matrix} \begin{bmatrix} c\\i\\y\\k\\h\\r\\w\\a \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} i\\y\\h\\w\\k\\a\\c\\r \end{bmatrix} \begin{matrix} 2\\3\\5\\7\\4\\8\\1\\6 \end{matrix} &
\end{array}$$

[2] Función de política y de estado como sistema de ecuaciones: sea el vector

de variables endógenas reordenadas Y_t, el vector de los valores de estado estacionario Y_{ss}, la matriz que contiene los coeficientes de las variables de estado "ghx", el vector de las variables de estado X_t y el vector que contiene los coeficientes asociados al error "ghu". Entonces el sistema de ecuaciones que representan las funciones de política y de estado es:

$$Y_t = Y_{ss} + ghx * X_t + ghu * U_t$$

Escribiendo este sistema en su forma extensiva:

$$\begin{bmatrix} i \\ y \\ h \\ w \\ k \\ a \\ c \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{ss} \\ y_{ss} \\ h_{ss} \\ w_{ss} \\ k_{ss} \\ a_{ss} \\ c_{ss} \\ r_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{ik} & \eta_{ia} \\ \eta_{yk} & \eta_{ya} \\ \eta_{hk} & \eta_{ha} \\ \eta_{wk} & \eta_{wa} \\ \eta_{kk} & \eta_{ka} \\ \eta_{ak} & \eta_{aa} \\ \eta_{ck} & \eta_{ca} \\ \eta_{rk} & \eta_{ra} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k(-1) \\ a(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{iu} \\ \eta_{yu} \\ \eta_{hu} \\ \eta_{wu} \\ \eta_{ku} \\ \eta_{au} \\ \eta_{cu} \\ \eta_{ru} \end{bmatrix} * e$$

Por ejemplo, la ecuación de política de la inversión es:

$$i = i_{ss} + \eta_{ik} k(-1) + \eta_{ia} a(-1) + \eta_{iu} e$$

La cual para el mod2, en el cuadro [2.28], se tiene:

$$i = -3.282 + 0.333k(-1) + 0.979a(-1) + 1e$$

[3] Coeficientes de estas funciones en oo_.dr: el vector de estado estacionario se encuentra en "oo_.dr.ys", la cual mantiene el orden inicial de las variables. El nuevo orden solo aplica para la matriz asociada a las variables de estado y del error, las cuales están guardadas respectivamente en "oo_.dr.ghx" y "oo_.dr.ghu".

$$\text{oo_.dr.ys} = \begin{bmatrix} -2.563 \\ -3.282 \\ -2.166 \\ -3.282 \\ -1.609 \\ 0.016 \\ -0.962 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oo_.dr.ghx} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.979 \\ 0.333 & 0.979 \\ 3.09E-15 & 1.03E-14 \\ 0.333 & 0.979 \\ 0.333 & 0.979 \\ 0 & 0.979 \\ 0.333 & 0.979 \\ -0.667 & 0.979 \end{bmatrix} \quad \text{oo_.dr.ghu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2.54E-14 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.4.9. Función Impulso Respuesta (IRF)

Como se menciono previamente, la estructura oo_ también contiene la función impulso-respuesta del modelo. Debido a que se requiere que todas las variables endógenas respondan al impulso, entonces Dynare crea otra estructura llamada "irfs", en la cual guarda la función impulso-respuesta de cada variable como se puede ver en la figura [2.9].

Si se requiere solo la función-impulso respuesta del consumo, por ejemplo, entonces basta con hace click en la variable "oo_.irfs.cc_e". Como se puede ver en la figura [2.10], la variable "oo_.irfs.cc_e" contiene un vector de 40 periodos, lo cual fue definifo en `stoch_simul`

Figura 2.9: Función impulso-respuesta (oo_.irfs)

oo_.irfs <1x1 struct>

Field	Value	Min	Class
cc_e	<1x40 double>	0.0048	double
ii_e	<1x40 double>	0.0048	double
yy_e	<1x40 double>	0.0048	double
kk_e	<1x40 double>	0.0048	double
hh_e	<1x40 double>	0	double
rr_e	<1x40 double>	-1.983...	double
ww_e	<1x40 double>	0.0048	double
aa_e	<1x40 double>	0.0031	double

Nota: Esta función impulso-respuesta se obtiene del archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

Figura 2.10: Función impulso-respuesta del consumo (oo_.irfs.cc_e)

oo_.irfs.cc_e <1x40 double>

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.0072	0.0094	0.0100	0.0101	0.0100	0.0098	0.0096	0.0094	0.0092	0.0090	0.0088

Nota: Esta función impulso-respuesta se obtiene del archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

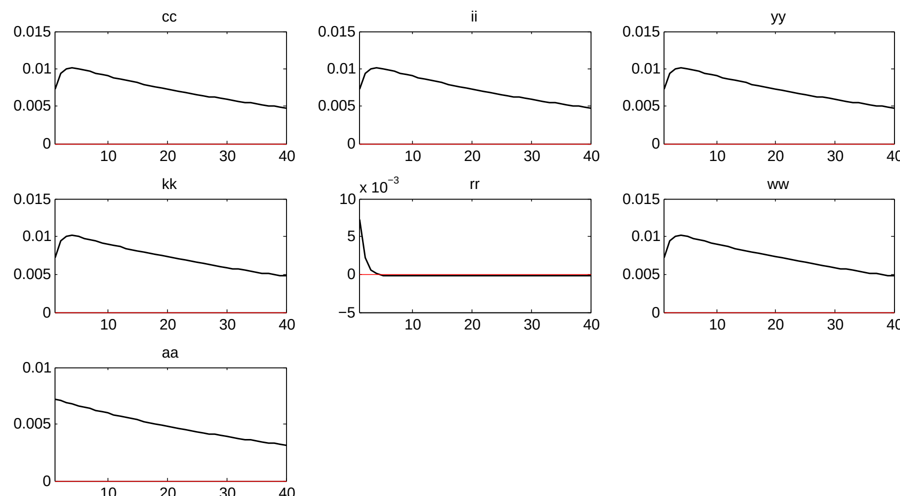
cuando se colocó "irf=40".

Dynare también grafica cada una de las variables que se encuentran en la estructura "oo_.irfs"; sin embargo, la gráfica es esencialmente básica en el sentido que no se modifican las líneas y además no considera los nombres de las variables en su versión extendida. Esto se observa en la figura [2.11].

La figura [2.11] se podría mejorar si se construye un código en Matlab que se alimente del archivo .mod y que grafique con los nombres extendidos de las variables y modificaciones estéticas en el gráfico. Esto se realiza en el código "irfs_nolineal_log.m" y se puede ver en el gráfico [2.12] el resultado.

```
dynare Long_Plosser_Dynare_nolineal_log;
IRF = [oo_.irfs.cc_e', oo_.irfs.ii_e', oo_.irfs.yy_e', oo_.irfs.kk_e', ...
    oo_.irfs.hh_e',oo_.irfs.rr_e', oo_.irfs.ww_e', oo_.irfs.aa_e',];
names = {'Consumo', 'Inversión', 'Producto', 'Capital', 'Trabajo', ...
    'Tasa de interés', 'Salario real', 'Productividad'};
for i=1:size(IRF,2)
    subplot(2,4,i)
    plot(IRF(:,i),'LineWidth', 1.5);
    title(names{i});
    grid;
end
orient landscape
saveas(gcf,'ifrs_nolineal_log_matlab','pdf');
```

Figura 2.11: Función impulso-respuesta (gráfica de Dynare)



Nota: Esta gráfica impulso-respuesta se obtiene del archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

Descripción del código: Primero se corre el archivo .mod (línea 1 del código):

dynare Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod;

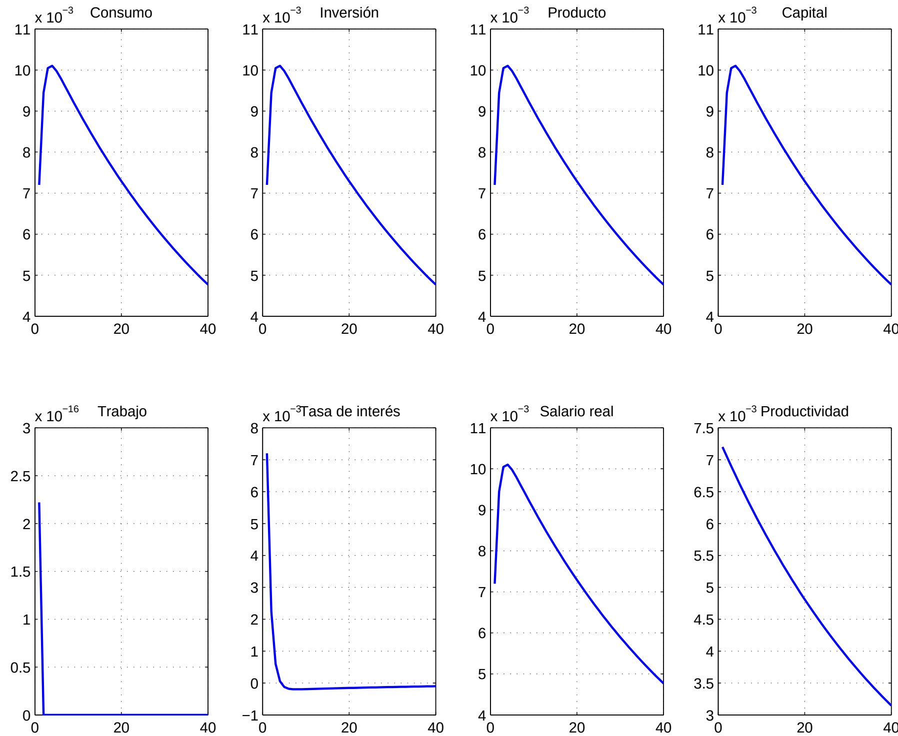
Luego se define una matriz que contenga todas las funciones impulso-respuesta (IRF), línea 2 del código. En tercer lugar se define un vector de celda que contenga los nombres de las variables (names). Finalmente, se construye un bucle para graficar cada impulso-respuesta con el nombre de la variable apropiada y el tamaño de linea apropiado (línea 4 al 9 del código). Los dos últimas comandos de este segmento de código coloca la hoja, donde se guarda el gráfico, en orientación horizontal (`orient landscape`) y luego la guarda en extensión pdf (línea 11).

2.4.10. Análisis de sensibilidad

El cuadro [2.13] muestra la función impulso-respuesta ante tres valores de la persistencia del choque de productividad. Se puede observar que mientras mayor persistencia muestra el choque, mayor es la reacción de cada variable endógena (excepto la tasa de interés y el trabajo, el cual se mantiene en su valor de estado estacionario). Además, se puede observar que las variables se tomán más tiempo para volver a su estado estacionario. Este gráfico se obtiene al escribir los siguientes códigos en el archivo .mod después de escribir `stoch_simul`.

```
% Valores del parámetro
rhos = [0.5 0.7 0.9];
for j= 1:size(rhos,2)
rho = rhos(j);
stoch_simul(order=1, irf=40, nograph, nomoments,nofunctions);
oo_sen{j} = oo_;
end;
```

Figura 2.12: Función impulso-respuesta (gráfica de Matlab)



Nota: Esta gráfica impulso-respuesta se obtiene del archivo “ifrs_nolineal_log.m”

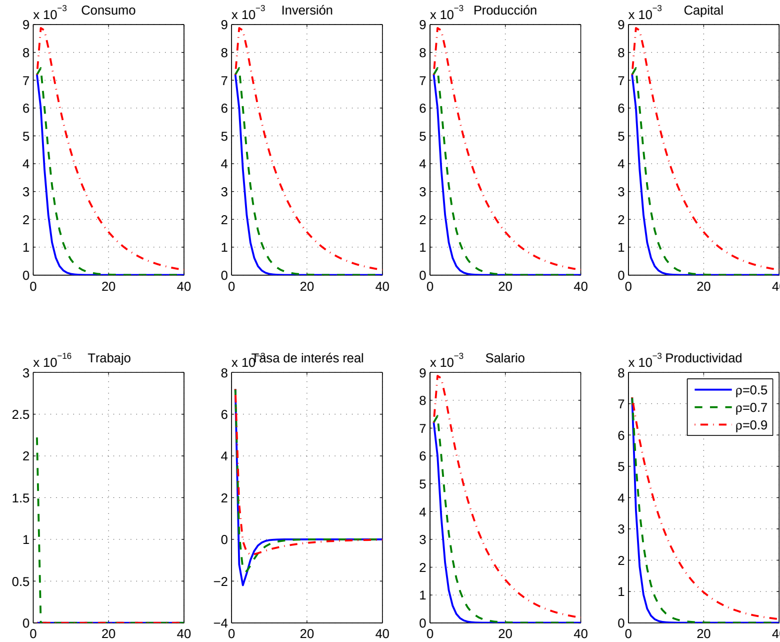
```
 8  % Gráfica
 9  name = {'Consumo', 'Inversión','Producción','Capital','Trabajo','Tasa ...
        de interés real', 'Salario', 'Productividad'};
10  field_name = fieldnames(oo_sen{1}.irfs); time = 1:40;
11      for j=1:size(name,2)
12          subplot(2,4,j)
13          plot(time,oo_sen{1}.irfs.(field_name{j}),...
14              time,oo_sen{2}.irfs.(field_name{j}),'--',...
15              time,oo_sen{3}.irfs.(field_name{j}),'-.','LineWidth', 1.5)
16          title(name{j});
17          grid;
18      end;
19      legend('\rho=0.5', '\rho=0.7', '\rho=0.9');
20  orient landscape
21  saveas(gcf,'analisis_sensibilidad','pdf');
```

Descripción del código: este código tiene dos partes. La primera es guardar la simulación del modelo ante cada valor de la persistencia de la productividad. Para ello se define un vector de valores de la persistencia (línea 2), y luego se aplica `stoch_simul` para los tres valores y se guarda cada resultado (oo_) en un vector de celda (oo_sen).

La segunda parte del código es graficar la función impulso-respuesta bajo los tres valores del parámetro. Para obtener esta gráfica en primer lugar se define el nombre de las

variables, cuyo orden es el que se describe al inicio del archivo .mod. En segundo lugar se extrae (como vector de celda) los nombres de la estructura "oo_sen{1}.irfs" (línea 9), la utilidad de esto es que servirá para hacer bucles con estructuras. En tercer lugar se construye un bucle para graficar el impulso-respuesta de cada variable ante los tres valores de la persistencia. La línea 13 es de especial importancia: el código "oo_sen{1}.irfs.(field_name{j})" para j=1 es "oo_sen{1}.irfs.cc_e". Para j=2 es "oo_sen{1}.irfs.ii_e" y así sucesivamente. En ello se puede ver la utilidad que tiene el "campo" de una variable estructura. Finalmente, el código `orient` indica la orientación de la hoja en la que se guardará el gráfico y el código `saveas` indica el nombre y la extensión con que se guardará el gráfico (usualmente se guarda en pdf o eps por su utilidad en LaTeX).

Figura 2.13: Análisis de sensibilidad: persistencia del Choque de productividad ρ



Nota: Esta gráfica impulso-respuesta se obtiene del archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

2.4.11. Simulación de las variables endógenas

Luego de que Dynare encuentra la solución del sistema linealizado se puede obtener la representación de series de tiempo ARMA(p,q) de las variables endógenas. Por ejemplo, del cuadro [2.28] para el capital del modelo no-lineal con variable en logarítmo se tiene:

$$\begin{aligned}
kk_{t+1} &= kk_{ss} + \eta_{kk}kk_t + \eta_{ka}aa_{t-1} + \epsilon_t \\
kk_{t+1} - kk_{ss} &= \eta_{kk}kk_t + \eta_{ka}aa_{t-1} + \epsilon_t \\
(lnk_{t+1} - lnk_{ss}) &= \eta_{kk}(lnk_t - lnk_{ss}) + \eta_{ka}(lna_{t-1} - lna_{ss}) + \epsilon_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= 0.333\widehat{k}_t + \underbrace{0.979\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t}_{\widehat{a}_t} \\
\widehat{k}_{t+1} &= 0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \\
(1 - 0.333L)\widehat{k}_{t+1} &= \widehat{a}_t \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Considerando que la productividad, que se comporta como un AR(1), se puede expresar en su forma MA(∞):

$$\begin{aligned}
aa_t &= \phi aa_{t-1} + \epsilon_t \\
(1 - \phi L)aa_t &= \epsilon_t \\
aa_t &= \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\
\text{Sabiendo} &: a_{ss} = 1 \\
lna_t - lna_{ss} &= \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\
\widehat{a}_t &= \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Introduciendo la ecuación (2.5) en la ecuación (2.4) se tiene que el capital se comporta como un AR(2):

$$\begin{aligned}
(1 - 0.333L)\widehat{k}_{t+1} &= \widehat{a}_t \\
(1 - 0.333L)\widehat{k}_{t+1} &= \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\
\widehat{k}_{t+1} &= \frac{\epsilon_t}{(1 - 0.333L)(1 - \phi L)} \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Dado que se tiene la expresión de series de tiempo de cada variable, Dynare podría simular el comportamiento de cada variable asumiendo un comportamiento aleatorio $N(0, \sigma_e^2)$ para el error ϵ. Para que Dynare realice esta tarea es suficiente indicarle en el `stoch_simul` el número de periodos (`periods`) que deseamos que la variable tenga. Por ejemplo:

```
stoch_simul(order=1, periods = 150)
```

Tres resultados podemos enfatizar sobre este código: en primer lugar, las variables simuladas son guardadas en la estructura oo_, en particular en las variables "exo_simul" y "endo_simul" (ver figura [2.14]). La primera variable contiene la simulación de la variable exógena; es decir, el error ϵ_t que se distribuye como una normal con media cero y varianza constante σ_e^2 (ver figura [2.15]). La segunda variable (endo_simul) contiene la simulación de todas las variables endógenas (en este caso son ocho). Cada fila representa la simulación de

Figura 2.14: Estructura oo_ (simulación)

oo_ <1x1 struct>

Field	Value	Min	Class
exo_simul	<150x1 double>	-0.0222	double
endo_simul	<8x150 double>	-3.3402	double
dr	<1x1 struct>		struct
exo_steady_state	0	0	double
exo_det_steady_state	[]		double
exo_det_simul	[]		double
steady_state	[-2.5635;-3.2822;-2.1665;-3.2822;-1.609...	-3.2822	double
mean	[-2.5785;-3.2972;-2.1815;-3.2972;-1.609...	-3.2972	double
var	<8x8 double>	2.0146...	double
autocorr	<1x5 cell>		cell
irfs	<1x1 struct>		struct

Nota: Esta estructura se obtiene de "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

una variable, el número de columnas es el número de periodos que se definio en stoch_simul (ver figura [2.16]).

Lo anterior muestra **una** simulación para cada una de las variables endógenas. Sin embargo, si se desea realizar por ejemplo 300 simulaciones para cada variable considerando 150 periodos es necesario no solo utilizar `periods = 150`, sino también `simul_replic = 300`. El resultado de estas opciones de `stoch_simul` es un archivo binario con el siguiente nombre: "NombreMod_simul". Una desventaja de este archivo es que no se puede abrir directamente en Matlab o algún otro programa. Para leer este archivo se usará una función creada por Johannes Pfeifer[3], el cual se puede descargar de la web. A continuación se describe los pasos para aplicar esta función:

- En primer lugar la función "get_simul_replications.m" tiene que estar presente en el directorio donde se encuentre el archivo .mod.
- En el archivo mod, después del comando `stoch_simul` se debe de colocar lo siguiente:

```
[sim_array]=get_simul_replications(M_,options_);
y_sim=squeeze(sim_array(strmatch('y',M_.endo_names,'exact'),:,:));
k_sim=squeeze(sim_array(strmatch('k',M_.endo_names,'exact'),:,:));
```

  La primera línea llama a la función "get_simul_replications.m" para convertir el archivo binario en una variable matricial de Matlab llamada "sim_array", la cual se guarda en el *workspace*. La segunda línea crea la variable "y_sim", la cual contiene la simulación del producto; es decir, contiene las 300 simulaciones (filas) de 100 periodos (columnas). Esta misma línea de código se puede aplicar a cada variable. El resultado de ello es una matriz, por variable, de 300 filas con 100 columnas. La tercera línea el código es la misma que la segunda solo que para el capital.

En la figura [2.17] se observa seis simulaciones del conjunto de 300 para el capital y el producto.

[3] https://github.com/JohannesPfeifer/DSGE_mod/blob/master/Hansen_1985/get_simul_replications.m

Figura 2.15: Simulación de la variable exógena

oo_.exo_simul <150x1 double>

	1	2
1	-2.8711e-04	
2	-0.0076	
3	-0.0019	
4	0.0058	
5	0.0044	
6	-0.0066	
7	-0.0126	
8	0.0018	
9	0.0039	
10	0.0027	
11	-0.0110	
12	-0.0162	

Nota: Esta estructura se obtiene de "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

Figura 2.16: Simulación de la variable endógena

oo_.endo_simul <8x150 double>

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-2.5638	-2.5715	-2.5752	-2.5697	-2.5632	-2.5679	-2.5816	-2.5827	-2.5778	-2.5727
2	-3.2825	-3.2902	-3.2939	-3.2884	-3.2820	-3.2866	-3.3003	-3.3014	-3.2966	-3.2914
3	-2.1668	-2.1745	-2.1782	-2.1727	-2.1662	-2.1709	-2.1846	-2.1857	-2.1808	-2.1757
4	-3.2825	-3.2902	-3.2939	-3.2884	-3.2820	-3.2866	-3.3003	-3.3014	-3.2966	-3.2914
5	-1.6094	-1.6094	-1.6094	-1.6094	-1.6094	-1.6094	-1.6094	-1.6094	-1.6094	-1.6094
6	0.0158	0.0084	0.0124	0.0216	0.0226	0.0115	0.0024	0.0151	0.0210	0.0213
7	-0.9623	-0.9700	-0.9737	-0.9682	-0.9618	-0.9664	-0.9801	-0.9812	-0.9763	-0.9712
8	-2.8711e-04	-0.0079	-0.0090	-0.0023	0.0023	-0.0045	-0.0166	-0.0132	-0.0080	-0.0044
9										

Nota: Esta estructura se obtiene de "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"

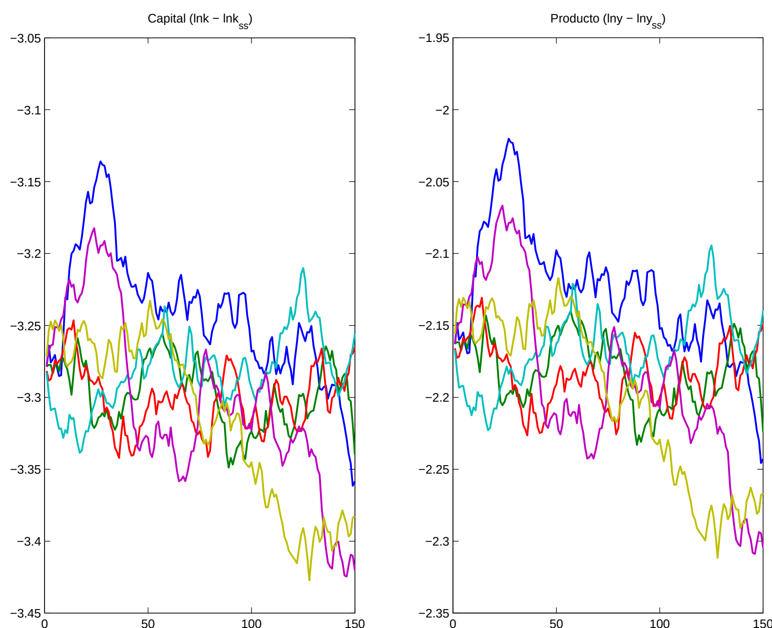
2.4.12. Cálculo de los momentos

El cuadro [2.29] muestra los momentos calculados por Dynare para los cuatro formas de escribir el modelo en Dynare. Una primera observación es que los momentos son similares cuando las variables tienen la misma naturaleza; es decir, si las variables están en niveles entonces no importa si el modelo que se escribió en Dynare fue no-lineal o linealizado, los momentos son similares. Lo mismo se concluye para las variables en logarítmo. Una segunda observación es que los momentos entre el modelo con las variables en niveles y el modelo con las variables en logarítmo son diferentes, lo cual es consistente con lo esperado.

¿Dónde guarda Dynare los momentos?

Dynare guarda la media, la matriz de varianza y covarianza y las autocorrelaciones dentro de la estructura oo_. Como se puede ver en la figura [2.14], el promedio se guarda en la variable "mean", la matriz de covarianza en la variable "var" y la matriz de autocorrelación en "autocorr".

Figura 2.17: Seis simulaciones del capital y el producto



Nota: Esta estructura se obtiene de "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod"y del código "simulacion_filtrohp.m"

2.4.13. Filtro HP

El cuadro [2.29] muestra los momentos de las variables endógenas, más no muestra los momentos de su componente cíclico, el cual es necesario para compararlo con los hechos estilizados y evaluar el poder explicativo del modelo. Para obtener el componente cíclico es necesario aplicar un filtro; es decir, una técnica que descomponga la variable en sus dos componentes: tendencia y ciclo. Para realizar esta tarea usualmente se aplica el filtro HP, el cual Dynare tiene habilitado como una opción de stoch_simul. El código para usar el filtro HP es el siguiente:

stoch_simul(order=1, hp_filter= lambda)

Donde "lambda" es igual a 1600 para datos trimestrales (para mayor detalle ver el cuadro [2.9]). Este código brinda los momentos del componente cíclico en el *command window* de Matlab, los cuales se muestran en el cuadro [2.30]. Cabe mencionar que Dynare no muestra el componente cíclico como una serie de tiempo.

Ante la desventaja que Dynare no calcula el componente cíclico de las series, Matlab dispone de una función llamada "hpfilter.m", la cual brinda el componente tendencial y cíclico de la serie. El uso de esta función se aprecia a continuación:

```
[trend_k,ciclo_k] =hpfilter(kk_sim(:,1),1600);
```

La función "hpfilter.m" requiere dos insumos. El primero es la serie o conjunto de series a la que se desea aplicar el filtro, en este caso es la primera simulación de capital

Cuadro 2.29: Momentos teóricos

Modelo No-Lineal							
Variables en niveles				Variables en logaritmos			
Variable	Media	Des. Est.	Varianza	Variable	Media	Des. Est.	Varianza
c	0.077	0.004	0	cc	-2.564	0.053	0.0028
i	0.038	0.002	0	ii	-3.282	0.053	0.0028
y	0.115	0.006	0	yy	-2.167	0.053	0.0028
k	0.038	0.002	0	kk	-3.282	0.053	0.0028
h	0.200	0	0	hh	-1.609	0	0
r	1.016	0.008	0.0001	rr	0.016	0.008	0.0001
w	0.382	0.020	0.0004	ww	-0.962	0.053	0.0028
a	1	0.035	0.0012	aa	0	0.035	0.0012
Modelo Lineal							
Variables en niveles				Variables en logaritmos			
Variable	Media	Des. Est.	Varianza	Variable	Media	Des. Est.	Varianza
ct	0.077	0.004	0	ch	-2.564	0.053	0.0028
it	0.038	0.002	0	ih	-3.282	0.053	0.0028
yt	0.115	0.006	0	yh	-2.167	0.053	0.0028
kt	0.038	0.002	0	kh	-3.282	0.053	0.0028
ht	0.200	0	0	hh	-1.609	0	0
rt	1.016	0.008	0.0001	rh	0.016	0.008	0.0001
wt	0.382	0.020	0.0004	wh	-0.962	0.053	0.0028
at	1	0.035	0.0012	ah	0	0.035	0.0012

"kk_sim(:,1)". La segunda es el parámetro de suavizamiento, el cual depende de la frecuencia de los datos (que se refleja en la calibración). Este parámetro toma el valor de 14400 para datos mensuales, 1600 para datos trimestrale y 100 para datos anuales; en este caso en particular estamos considerando datos trimestrales por ello se coloca 1600.

Asimismo, esta función entrega dos resultados: la primera es el componente tendencial de la serie (trend_k) y la segunda es el componente cíclico (ciclo_k). En la figura [2.18] se observa el componente cíclico y tendencial del capital derivado de la aplicación del filtro HP.

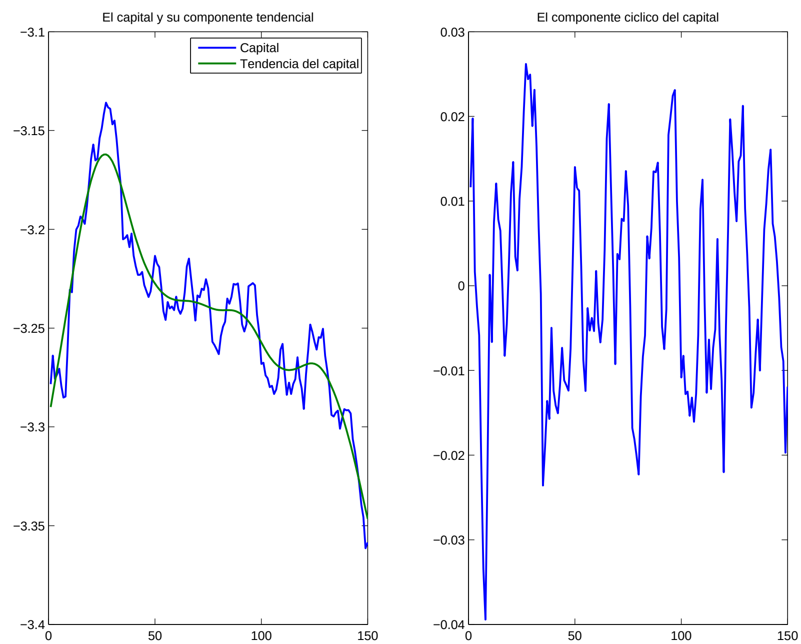
Cuadro 2.30: Momentos teóricos (filtro HP)

Momentos teóricos (HP filter, lambda=1600)			
Variable	Media	Des. Est.	Varianza
cc	-2.5635	0.0126	0.0002
ii	-3.2822	0.0126	0.0002
yy	-2.1665	0.0126	0.0002
kk	-3.2822	0.0126	0.0002
hh	-1.6094	0	0
rr	0.0161	0.0072	0.0001
ww	-0.962	0.0126	0.0002
aa	0	0.0094	0.0001

2.5. Códigos

En el cuadro [2.31] se indica los códigos utilizados en este capítulo.

Figura 2.18: Componente cíclico y tendencial del capital



Nota: Esta estructura se obtiene de "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod" y del código "simulacion_filtrohp.m"

Cuadro 2.31: Códigos en Matlab y Dynare

Códigos	Descripción
Matlab	
irfs_nolineal_log.m	Este m-file ilustra que los gráficos la función impulso-respuesta obtenidos de Dynare pueden ser mejorados mediante códigos de Matlab.
simulacion_filtrohp.m	Este m-file aplica el filtro HP a la series simuladas del modelo.
aux_irfs_nolineal_log.m	Este m-file grafica las funciones impulso-respuesta por medio de un bucle.
aux_analisis_sensibilidad.m	Este m-file decribe el código que se puede escribir al final de un archivo .mod para realizar análisis de sensibilidad; es decir, para obtener las funciones impulso-respuesta ante diferentes valores de los parámetros.
Dynare	
Long_Plosser_Dynare_nolineal_niv.mod	Este .mod contiene las ecuaciones no-lineales y con las variables en niveles del modelo de Long y Plosser (1983, 1989).
Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod	Este .mod contiene las ecuaciones no-lineales y con las variables en logarítmo del modelo de Long y Plosser (1983, 1989). Este código es utilizado en el capítulo 2 y 3. En el capítulo 2, este código se usa para ejemplificar los comandos de Dynare. En el capítulo 3 se utiliza para obtener la solución del modelo y los IRF.
Long_Plosser_Dynare_lineal_niv.mod	Considera el modelo lineal con las variables en niveles del modelo de Long y Plosser (1983, 1989).
Long_Plosser_Dynare_lineal_log.mod	Considera el modelo lineal con las variables en logarítmo del modelo de Long y Plosser (1983, 1989).

Capítulo 3

Modelo RBC con solución analítica

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es ilustrar en profundidad cada uno de los pasos en la construcción de un modelo RBC. Con este fin en mente, estudiar un modelo sencillo (*toy model*) es una ventaja. Para ello este capítulo se basa en el modelo desarrollado por Long y Plosser (1983) y Plosser (1989).

El modelo propuesto por Long y Plosser (1983) busca capturar las dinámicas de diversos sectores económicos y sus comovimientos entre ellos ante un choque de productividad. De otro lado, el modelo propuesto por Plosser (1989) es un modelo unisectorial. Ambos modelos tienen dos supuestos subyacentes. La primera es que se asume que los bienes son perecibles y duran un solo periodo; es decir, el capital se deprecia totalmente. La segunda es que las preferencias son aditivas y están expresadas como el logaritmo del consumo y el logarítmo del ocio.

Estos dos supuestos tienen importantes efectos en la solución del modelo. En primer lugar permite que el modelo sea resuelto analíticamente; es decir, se puede encontrar un solución exacta a *mano y papel*. La segunda es que la función de política del trabajo sugiere que esta variable no reacciona ante el capital ni ante el choque de productividad; es decir, siempre se mantiene en estado estacionario. Esto se debe a que el efecto de la tasa de interés sobre el consumo es nulo porque el efecto sustitución e ingreso se contrarestan totalmente entre ellos.

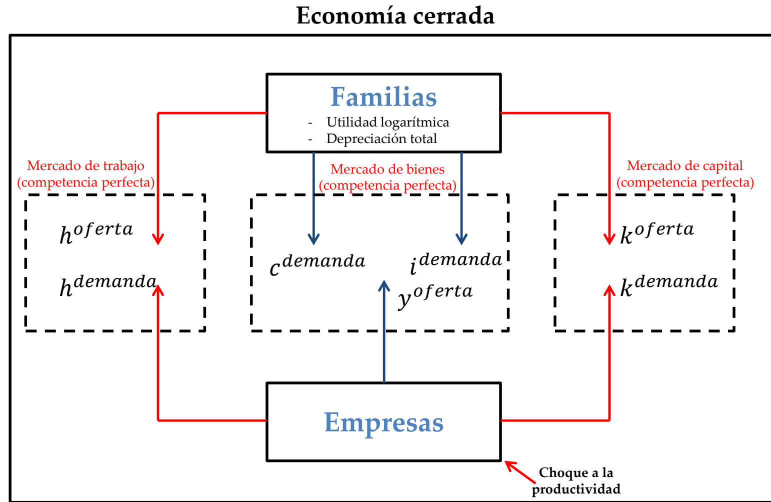
3.2. Construcción del modelo

Este modelo esta basado en Long y Plosser (1983, 1989) y tiene solución analítica; es decir, se puede resolver directamente por medio de operaciones algebraicas. Esto se debe a dos supuestos: depreciación total y utilidad logarítmica (en consumo y ocio). Además, este modelo se basa en los siguientes supuestos: en la economía existen dos agentes económicos (familias y empresas), de las cuales las familias son dueñas del capital y las empresas se desarrollan en un ambiente de competencia perfecta tanto en el mercado de bienes y como

en el de factores.

Además, se asume que la economía es cerrada, lo cual implica que el ahorro sea igual a la inversión. Finalmente, en esta economía, la única fuente de incertidumbre proviene por el lado de la oferta, en particular se asume un choque de productividad. La figura [3.1] esquematiza la interacción entre las familias y las empresas y los mercados en que ellos participan.

Figura 3.1: Esquema del modelo de Long y Plosser (1983, 1989)



3.2.1. Función de utilidad

Antes de describir en detalle el modelo es importante entender el rol que tiene las formas funciones de la función de utilidad en la construcción del modelo de equilibrio general. King et. al. (1988) imponen dos restricciones sobre las preferencias (función de utilidad) que permiten que el estado estacionario sea compatible con un equilibrio competitivo óptimo:

- La elasticidad de sustitución intertemporal del consumo debe ser invariante a la escala del consumo.
- El efecto ingreso y sustitución asociadas con el crecimiento en la productividad laboral no debe alterar la oferta de trabajo.

La función de utilidad que cumple estas dos restricciones es:

$$u(c,l) = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\sigma}c^{1-\sigma}\right]v(l), & \text{si } \sigma > 0 \text{ y } \sigma \neq 1 \\ ln(c) + v(l), & \text{si } \sigma = 1 \end{cases}$$

Donde c es consumo y l es ocio; σ es la elasticidad de sustitución del consumo (invariante a la escala del consumo) y $v(l)$ es una función del ocio. Según King et. al. (1988), un caso particular de esta función de utilidad es cuando $v(l) = \theta ln(l)$:

$$u(c,l) = ln(c) + \theta ln(l) \tag{3.1}$$

Además, en la literatura de los modelos RBC aparecen otras funciones de utilidad, en las cuales se considera que l_t es el ocio, h_t es el trabajo y que se cumple la siguiente relación entre ambas: $l_t + h_t = 1$, donde el tiempo disponible por la familia, que usualmente son 24 horas, se ha normalizado a 1. A continuación se mencionan otras funciones de utilidad usual en la literatura:

- Hansen(1985):

$$u(c_t, l_t) = ln(c_t) + Bl_t \tag{3.2}$$

- Greenwood, et. al. (1989):

$$u(c_t, h_t) = \frac{1}{1-\gamma}\left[\left(c_t - \frac{h_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{1-\gamma} - 1\right] \tag{3.3}$$

- Campbell (1994): trabajo fijo (se usa en el capítulo 4)

$$u(c_t, h_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{3.4}$$

- Campbell (1994): trabajo variable (se usa en el capítulo 5)

$$u(c_t, h_t) = ln(c_t) + \theta\frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \tag{3.5}$$

- Long y Plosser (1983) y Plosser (1989):

$$u(c_t, h_t) = ln(c_t) + \theta ln(1-h_t) \tag{3.6}$$

La función de utilidad de la ecuación (3.6) se obtiene considerando $\gamma_n = 1$ en la función de utilidad (3.5). Esta es la función de utilidad que Long y Plosser (1983) consideran en su modelo. Cabe resaltar dos ideas: la primera es que θ es la participación del ocio en todo el tiempo que dispone la familia representativa. La segunda es que cada función de utilidad tiene un nivel diferente de **elasticidad de Frisch**[1] y de elasticidad de sustitución intertemporal del consumo (ESI_c).

3.2.2. Familias

Uno de los principales supuestos de los modelos RBC es que las familias presentes en la economía son todas idénticas. Ese decir, sus preferencias y restricciones son similares. Este supuesto permite analizar el comportamiento de las familias por medio del estudio de un agente representativo (una familia que represente a todas), y permtie realizar la agregación de las familias de manera sencilla. En el modelo de Long y Plosser se considera el supuesto del agente representativo, el cual maximiza una función de utilidad descontada:

[1] La elasticidad de Frisch es la elasticidad de la oferta de trabajo manteniendo constante el efecto ingreso. Esta elasticidad será analizada con mayor detalle en el capítulo 5.

$$\underset{\{c_t,h_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t) \tag{3.7}$$

Donde c_t es el consumo del periodo t y β es el factor de descuento, el cual está expresado de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}$$

Donde ρ refleja la impaciencia del agente representativo. Mientras más impaciente sea la familia más grande será ρ y por tanto β será menor. Es decir, el individuo valora menos a las utilidades futuras. Si $\rho = 0$ significa que la familia es totalmente paciente y por tanto $\beta = 1$, lo cual indica que la familia brinda la misma valoración a la utilidad de hoy que la utilidad de mañana. Este análisis se aprecia mejor en el cuadro [3.1] considerando que el valor presente de la función de utilidad se expresa de la siguiente manera:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t) = u(c_0, h_0) + \beta u(c_1, h_1) + \beta^2 u(c_2, h_2) + \beta^3 u(c_3, h_3)...$$

Cuadro 3.1: Efecto de la impaciencia en el factor de descuento

Impaciencia ρ	Efecto en β	$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t)$	Valoración
Impaciencia nula $\rho = 0$	$\beta = 1$	$u(c_0, h_0) + u(c_1, h_1) + u(c_2, h_2) + ...$	La familia brinda la misma valoración a la utilidad a traves del tiempo.
Poca impaciencia $\rho = 1$	$\beta = 1/2$	$u(c_0, h_0) + \frac{1}{2}u(c_1, h_1) + \frac{1}{4}u(c_2, h_2) + ...$	La familia brinda más valoración a la utilidad de hoy que en el futuro: la valoración a la utilidad de hoy es 1, mientras que a la utilidad en $t = 1$ es 0.5 y en $t = 2$ es 0.25.
Mayor impaciencia $\rho = 2$	$\beta = 1/3$	$u(c_0, h_0) + \frac{1}{3}u(c_1, h_1) + \frac{1}{9}u(c_2, h_2) + ...$	La familia brinda más valoración a la utilidad de hoy que en el futuro: la valoración a la utilidad de hoy es 1, mientras que a la utilidad de mañana lo valora con 0.33 y en "$t = 2$" es 0.11.
Impaciencia total $\rho = \infty$	$\beta = 0$	$u(c_0, h_0) + 0u(c_1, h_1) + 0u(c_2, h_2) + ...$	La familia brinda toda la valoración a la utilidad de hoy. No valora nada consumir en el futuro.

Considerando la forma funcional de la función instántanea de utilidad según la ecuación (3.6), la función objetivo a maximizar sería:

$$\underset{\{c_t,h_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \big(ln(c_t) + \theta ln(1-h_t)\big)$$

La maximización de esta función objetivo está sujeta a dos restricciones: la restricción presupuestaria y la ley de movimiento del capital, las cuales se describen a continuación.

Restricción presupuestaria: por un lado, la familia percibe sus ingresos del alquiler del capital k_t a las empresas a una tasa de interés real r_t. Además, las familias forman parte del mercado de trabajo donde ofrecen mano de obra h_t a un salario real w_t. Ambos ingresos se observan en cada periodo y son iguales a: $r_t k_t + w_t h_t$.

Por otro lado, la familia destina sus ingresos a bienes de consumo c_t y al ahorro que, en economía cerrada, es igual a la inversión i_t. Por tanto, uniendo los ingresos y los egresos, la restricción presupuestaria de la familia representativa es:

$$c_t + i_t = r_t k_t + w_t h_t \tag{3.8}$$

Ley de movimiento del capital: por cuentas nacionales se sabe que la inversión neta es igual a la inversión bruta menos la depreciación:

$$\begin{aligned} \text{I}_{\text{neta}} &= \text{I}_{\text{bruta}} - \text{Depreciación} && (3.9)\\ k_{t+1} - k_t &= i_t - \delta k_t \\ k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t && (3.10) \end{aligned}$$

A la ecuación (3.10) se le conoce como la ley de movimiento de capital, la cual describe el comportamiento del stock de capital. Cabe mencionar que esta ecuación supone que el stock de capital se deprecia en un porcentaje δ (usualemente 2.5 % trimestral) en cada periodo. Sin embargo, Long y Plosser (1983) asumieron que la tasa de depreciación es total ($\delta = 1$); es decir, que el capital en cada periodo se deprecia totalmente en ese mismo periodo de tal manera que no queda capital para el siguiente periodo (esto es el supuesto que todos los *commodities* son perecibles). Aunque el supuesto es muy poco realista, ayuda a eliminar ciertas no linealidades del sistema de ecuaciones. Con este supuesto en mente, la ecuación (3.10) se convierte en:

$$k_{t+1} = i_t \tag{3.11}$$

Es decir, el capital en $t+1$ es la inversión que se realiza en "t". No hay stock de capital, el capital se convierte en un flujo y siempre es igual a los nuevos bienes en cada periodo. Introduciendo la ecuación (3.11) en la restricción presupuestaria, ecuación (3.8), se tiene:

$$c_t + k_{t+1} = r_t k_t + w_t h_t \tag{3.12}$$

Entonces el problema de optimización de la familia es:

$$\underset{\{c_t,h_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \big(ln(c_t) + \theta ln(1-h_t)\big)$$

sujeto a:

$$c_t + k_{t+1} = r_t k_t + w_t h_t$$

Construyendo la función de Lagrange:

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \big[u(c_t, h_t) + \lambda_t \big(r_t k_t + w_t h_t - (c_t + k_{t+1})\big)\big]$$

Donde la versión extendida de la función de Lagrange se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & E_0 \Big\{ \beta^0 \big[u(c_0, h_0) + \lambda_0 \big(r_0 k_0 + w_0 h_0 - (c_0 + k_1)\big)\big] + \\
& \beta^1 \big[u(c_1, h_1) + \lambda_1 \big(r_1 k_1 + w_1 h_1 - (c_1 + k_2)\big)\big] + \\
& \beta^2 \big[u(c_2, h_2) + \lambda_2 \big(r_2 k_2 + w_2 h_2 - (c_2 + k_3)\big)\big] + \\
& \beta^3 \big[u(c_3, h_3) + \lambda_3 \big(r_3 k_3 + w_3 h_3 - (c_3 + k_4)\big)\big] + \\
& \beta^4 \big[u(c_4, h_4) + \lambda_4 \big(r_4 k_4 + w_4 h_4 - (c_4 + k_5)\big)\big] + \\
& ... + \\
& \beta^t \big[u(c_t, h_t) + \lambda_t \big(r_t k_t + w_t h_t - (c_t + k_{t+1})\big)\big] + \\
& \beta^{t+1} \big[u(c_{t+1}, h_{t+1}) + \lambda_{t+1} \big(r_{t+1} k_{t+1} + w_{t+1} h_{t+1} - (c_{t+1} + k_{t+2})\big)\big] + \\
& ... + \\
& ... \Big\}
\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden, en el periodo "t", son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Longrightarrow E_0 \Big\{ \beta^t \big[u_{c_t} + \lambda_t(-1)\big] \Big\} = 0$$

$$u_{c_t} = \lambda_t \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t} = 0 \Longrightarrow E_0 \Big\{ \beta^t \big[u_{h_t} + \lambda_t(w_t)\big] \Big\} = 0$$

$$u_{h_t} = -\lambda_t w_t \tag{3.14}$$

Reemplazando la ecuación (3.13) en la ecuación (3.14) se obtiene la oferta de trabajo:

$$\begin{aligned}
u_{h_t} &= -\lambda_t w_t \\
-\frac{\theta}{1 - h_t} &= -\frac{1}{c_t} w_t \\
\frac{\theta}{1 - h_t} &= \frac{w_t}{c_t}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

De otro lado, la condición de primer orden con respecto al capital k_{t+1} es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \Longrightarrow E_0 \Big\{ \beta^t \big[\lambda_t(-1)\big] + \beta^{t+1} \big[\lambda_{t+1}(r_{t+1})\big] \Big\} = 0$$

$$\lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1}(r_{t+1}) \tag{3.16}$$

Reemplazando le ecuación (3.13) en la ecuación (3.16) se obtiene la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} u_{c_t} &= \beta E_t u_{c_{t+1}}(r_{t+1}) \\ \frac{1}{c_t} &= \beta E_t \frac{1}{c_{t+1}}(r_{t+1}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.2.3. Empresas

Función de producción: se asume que existe un solo bien final en la economía y es producido por una función de producción neoclásica $f(a_t, k_t, h_t)$. La función de producción Cobb-Douglas cumple con las características de una función neoclásica y describe razonablemente bien la producción de un país.

$$y_t = f(a_t, k_t, h_t) = a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha} \tag{3.18}$$

Donde k_t es el stock de capital predeterminado (elegido en el periodo "t-1") y h_t es el insumo trabajo. Además, la variable a_t hace referencia a la productividad; el cual se supone que se comporta de manera estocástica y es expresado por un AR(1).

Una característica importante de la función Cobb-Douglas es que la participación de cada uno de los factores en la renta total es constante e igual a los exponentes de cada factor en la función de producción. Como se sabe en competencia perfecta (supuesto clave en los moldelos RBC), el alquiler del capital es igual a la productividad marginal del capital; es decir: $r_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{k_t}$. De igual forma para el trabajo: $w_t = \alpha \frac{y_t}{h_t}$.

La renta destinada al pago del capital y del trabjo es $r_t k_t$ y $w_t h_t$ respectivamente. Al considerar que la producción representa toda la renta de un país entonces, la proporción de la renta orientada al pago del capital con respecto a la renta total es $r_t k_t / y_t$:

$$\frac{r_t k_t}{y_t} = (1-\alpha)\frac{y_t}{k_t}\frac{k_t}{y_t} = (1-\alpha) \tag{3.19}$$

De igual forma calculando la proporción de la renta total orientada al pago del trabajo:

$$\frac{w_t h_t}{y_t} = \alpha \frac{y_t}{h_t}\frac{h_t}{y_t} = \alpha \tag{3.20}$$

La ecuación (3.19) y (3.20) indican que la participación del capital en la renta es igual a "$1-\alpha$", y la participación del trabajo en la renta es "α". Ambas participaciones son constantes e iguales a los exponentes de los factores en la función de producción. Esto sugiere que se podría obtener el valor de "α" mediante las cuentas nacionales, lo cual sería en los términos de los modelos RBC una calibración del parámetro α. En el capítulo 1 se observa que el promedio de la participación del trabajo en el ingreso nacional entre 1948 y 2014 para la economía norteamericana es igual a 66.3 %. Esto sugiere que α podría tomar dicho valor.

Características de la función de producción neoclásica

Para que una función de producción $f(a_t, k_t, h_t)$ sea considerada neoclásica debe de tener tres características (Barro y Sala-i-Martin, 2009):

1. **Rendimientos a escala constante:** la función $f(a_t, k_t, h_t)$ debe de mostrar rendimientos a escala constante; es decir, si multiplicamos el capital y el trabajo por una constante λ, el producto queda multiplicado por esa misma constante.

$$f(a_t, \lambda k_t, \lambda h_t) = \lambda f(a_t, k_t, h_t) \tag{3.21}$$

2. **Rendimientos positivos y decrecientes:** la función de producción neoclásica presenta productos marginales positivos y decrecientes en cada factor de producción.

$$\begin{aligned} \text{Rendimientos positivos} &: \frac{\partial f(\cdot)}{\partial k_t} > 0, \quad \frac{\partial f(\cdot)}{\partial h_t} > 0 \\ \text{Rendimientos decrecientes} &: \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial k_t^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial h_t^2} < 0 \end{aligned}$$

3. **Condiciones de Inada:** estas condiciones indican que el producto marginal del capital tiende a infinito cuando el capital tiende a cero y tiende a cero cuando el capital tiende a infinito. La misma condición se cumple para el trabajo. En términos matemáticos estas condiciones se expresan como:

$$\begin{aligned} \text{Capital} &: \lim_{k_t \to 0}\left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial k_t}\right) = \infty, \quad \lim_{k_t \to \infty}\left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial k_t}\right) = 0 \\ \text{Trabajo} &: \lim_{h_t \to 0}\left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial h_t}\right) = \infty, \quad \lim_{h_t \to \infty}\left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial h_t}\right) = 0 \end{aligned}$$

La optimización: las empresas se desenvuelven en un contexto de competencia perfecta en el mercado de bienes y en el mercado de factores (trabajo y capital). Ellas maximizan su función de beneficos considerando su tecnología, la cual se asume tiene la forma funcional Cobb-Douglas. En este modelo las empresas deciden cuanto capital alquilar y cuanto trabajo (en horas) contratar. Por tanto, las dos variables de optimización son: capital k_t y trabajo h_t.

$$\underset{\{k_t, h_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \; \Pi_t = y_t - (r_t k_t + w_t h_t)$$

Sujeto a la función de producción:

$$y_t = a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha} \tag{3.22}$$

Cabe mencionar que debido a que la empresa no enfrenta una restricción dinámica, la empresa maximiza los beneficios en cada momento del tiempo. Por ello el problema de optimización es estático. Para resolver este problema se introduce la función de producción en la función objetivo:

$$\underset{\{k_t,h_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \Pi_t = a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha} - (r_t k_t + w_t h_t) \tag{3.23}$$

Derivando esta expresión, ecuación (3.23), con respecto al capital k_t:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k_t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial (a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha} - r_t k_t)}{\partial k_t} = 0 \Longrightarrow (1-\alpha) a_t {k_t}^{-\alpha} {h_t}^{\alpha} - r_t = 0$$

De esta condición de primer orden se obtiene la demanda de capital:

$$\begin{aligned}
r_t &= (1-\alpha) a_t \left[\frac{h_t}{k_t}\right]^{\alpha} \\
r_t &= (1-\alpha) a_t \left[\frac{h_t^{\alpha}}{k_t^{\alpha}}\right] \\
r_t &= (1-\alpha) a_t h_t^{\alpha} k_t^{-\alpha} \frac{k_t}{k_t} \\
r_t &= (1-\alpha) a_t h_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha} \frac{1}{k_t} \\
r_t &= (1-\alpha) \frac{y_t}{k_t}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Derivando la ecuación (3.23) con respecto al trabajo h_t:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial h_t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial (a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha} - r_t k_t - w_t h_t)}{\partial h_t} = 0 \Longrightarrow \alpha a_t {k_t}^{1-\alpha} {h_t}^{\alpha-1} - w_t = 0$$

De esta condición de primer orden se obtiene la demanda del trabajo:

$$\begin{aligned}
w_t &= \alpha a_t \left[\frac{k_t}{h_t}\right]^{1-\alpha} \\
w_t &= \alpha a_t \left[\frac{k_t^{1-\alpha}}{h_t^{1-\alpha}}\right] \\
w_t &= \alpha a_t \frac{k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha}}{h_t} \\
w_t &= \alpha \frac{y_t}{h_t}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.2.4. Equilibrio de mercado y definición del choque

Para cerrar el modelo es necesario definir el equilibrio en el mercado de bienes:

$$y_t = c_t + i_t \tag{3.26}$$

Además, es necesario definir el comportamiento de la productividad:

$$lna_t = \phi lna_{t-1} + \epsilon_t \tag{3.27}$$

Cabe mencionar que el choque de productividad ϵ_t se comporta como una distribución normal con media cero y varianza constante: $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_{\epsilon}^2)$.

3.2.5. Ecuaciones principales

Las ecuaciones principales del modelo se resumen en el cuadro [3.2]:

Cuadro 3.2: Sistema de ecuaciones no lineal del modelo

Agente	Ecuaciones	Descripción
Familia	$\frac{1}{c_t} = \beta E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}} r_{t+1}\right]$	Ecuación de Euler
	$k_{t+1} = i_t$	Ley de movimiento del capital
	$\frac{\theta}{1-h_t} = \frac{w_t}{c_t}$	Oferta de trabajo
Empresa	$y_t = a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha}$	Función de producción
	$r_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{k_t}$	Demanda del capital
	$w_t = \alpha \frac{y_t}{h_t}$	Demanda de trabajo
Equilibrio	$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
Choque	$lna_t = \phi lna_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

Es importante mencionar que el sistema de ecuaciones está conformada por: [1] el mercado de capital: oferta de capital representada por la ley de movimiento de capital y la demanda de capital, [2] el mercado de trabajo: oferta de trabajo y la demanda de trabajo, [3] el mercado de bienes: la oferta de bienes representada por la función de producción, la demanda de consumo representada por la ecuación de Euler y la demanda de inversión que está representada por la ley de movimiento de capital; asismimo, este mercado requiere que se haga explícito su equilibrio por medio de la ecuación $y_t = c_t + i_t$, finalmente [4] el choque de productividad. Todas estas ecuaciones están descritas en el cuadro [3.2]. Asimismo, es importante verificar que el número de variables sea igual al número de ecuaciones. En este caso existen ocho variables (y_t, c_t, i_t, k_t, h_t, r_t, w_t y a_t) y ocho ecuaciones.

3.3. Calibración

La calibración puede ser entendida como una forma de *estimación por simulación* (Hoover, 1995). Este procedimiento consiste en asignar valores a los parámetros del modelo y luego se compara las principales características de las variables simuladas del modelo calibrado con aquellas provenientes de los datos. En este capítulo como en el capítulo 2 la calibración está basada en King y Rebelo (2000), cuyos valores se muestran en el cuadro [3.3].

Tal como lo menciona Cooley y Prescott (1995), dado que la estructura subyacente a los modelos RBC es un modelo neoclásico de crecimiento, la elección del valor de los parámetros (calibración) y las formas funcionales (por ejemplo: función de utilidad y la ley de movimiento de capital) deberían asegurar que el modelo económico muestre un crecimiento balanceado[2].

[2]Se entiende por crecimiento balanceado (*balanced growth*) a la situación en la cual todos los sectores de una economía crecen a la misma tasa constante. Esto es similar a la definición de "crecimiento en estado estacionario" (*steady-state growth*), el cual indica la situación en la cual el producto, capital, trabajo y consumo cambian a la misma tasa. Como la tasa de crecimiento del capital depende de los ahorros, el

Cuadro 3.3: Calibración

Parámetro	Observación
$\alpha = 0.667$	Proporción de largo plazo del trabajo en el ingreso nacional
$\theta = 3.968$	Calibrado para que el trabajo en estado estacionario sea igual a 20 %
$\phi = 0.979$	Persistencia del choque
$\beta = 0.984$	Factor de descuento
$\sigma_e = 0.0072$	Desviación estándar del choque de productividad

3.4. Estado estacionario

Al estado estacionario se le conoce como equilibrio de largo plazo donde $\Delta x_t = 0$ (para todas las variables del modelo) y que el choque de productividad (ε_t) toma su valor promedio ($= 0$). Además, dada la ecuación de movimiento de la productividad, su valor de estado estacionario es $a = 1$. Asimismo, las expectativas desaparecen, por ello se le conoce como solución no estocástica. El objetivo es encontrar el valor de estado estacionario en función del conjunto de parámetros del modelo. Para ello es importante considerar los siguientes tres criterios: en primer lugar, colocar todas las ecuaciones del modelo en estado estacionario; es decir, eliminar la temporalidad y las expectativas. En segundo lugar, utilizar las variables que solo dependen de los parámetros del modelo para hallar el estado estacionario de las demás variables. En tercer lugar, tratar de resolver el sistema de ecuaciones en función de ratios; por ejemplo, en lugar de buscar el valor de k_{ss} (capital de estado estacionario) se podría buscar el valro del ratio y_{ss}/k_{ss}. Cabe mencionar que hallar el estado estacionario es un paso previo a la log-linelización. Para la ecuación de Euler se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_t} &= \beta E_t \frac{1}{c_{t+1}} r_{t+1} \\
\frac{1}{c_{ss}} &= \beta E_t \frac{1}{c_{ss}} r_{ss} \\
1 &= \beta r_{ss} \\
r_{ss} &= \frac{1}{\beta} \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

De la misma manera para la ley de movimiento del capital:

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= i_t \\
k_{ss} &= i_{ss} \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

crecimiento en estado estacionario requiere que la función de ahorros sea estable: la política de endeudamiento puede promover estabilidad manteniendo la tasa de interés constante. Si la tasa de crecimiento es igual a cero, entonces se dice que la economía está en estado estacionario (*stationary state o steady state*). Este ultimo es un estado teórico de la economía en el cual se consume exactamente lo que se produce y reemplaza lo que este consume al final del periodo. Otra forma de enterderlo es cuando una economía tiene un tamaño de población y stock de capital constante; es decir, la inversión solo es realizada para mantener el stock de capital existente; en otras palabras su *steady-state growth* es igual a cero (Rutherford,2002; Collin, 2003).

Para la oferta de trabajo:

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{1-h_t} &= \frac{w_t}{c_t}\\ \frac{\theta}{1-h_{ss}} &= \frac{w_{ss}}{c_{ss}}\end{aligned} \tag{3.30}$$

Para la función de producción:

$$\begin{aligned}y_t &= a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha}\\ y_{ss} &= a_{ss} k_{ss}^{1-\alpha} h_{ss}^{\alpha}\end{aligned} \tag{3.31}$$

Para la demanda de capital:

$$\begin{aligned}r_t &= (1-\alpha)\frac{y_t}{k_t}\\ r_{ss} &= (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\end{aligned} \tag{3.32}$$

Considerando la ecuación (3.28) en la ecuación (3.32), se tiene el ratio $\frac{y_{ss}}{k_{ss}}$ en función de parámetros del modelo:

$$\begin{aligned}r_{ss} &= (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\\ \frac{1}{\beta} &= (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\\ \frac{y_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{1}{\beta(1-\alpha)}\end{aligned} \tag{3.33}$$

Es una buena estrategia encontrar ratios, especialmente cuando el denominador es el capital. Esto permite que cada variable dependa del capital en estado estacionario, el cual al hallar su valor permite encontrar los valores de las variables restantes.

Para demanda de trabajo:

$$\begin{aligned}w_t &= \alpha\frac{y_t}{h_t}\\ w_{ss} &= \alpha\frac{y_{ss}}{h_{ss}}\end{aligned} \tag{3.34}$$

Para la ecuación de equilibrio en el mercado de bienes:

$$\begin{aligned}y_t &= c_t + i_t\\ y_{ss} &= c_{ss} + i_{ss}\end{aligned} \tag{3.35}$$

Pero, de la ecuación (3.29) se sabe que: $k_{ss} = i_{ss}$, entonces considerando esta igualdad en la ecuación (3.35), se tiene:

$$\begin{aligned} y_{ss} &= c_{ss} + i_{ss} \\ y_{ss} &= c_{ss} + k_{ss} \\ \frac{y_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{c_{ss}}{k_{ss}} + 1 \\ \frac{c_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{y_{ss}}{k_{ss}} - 1 \\ \frac{c_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{1}{\beta(1-\alpha)} - 1 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Finalmente para la ecuación de comportamiento de la productividad:

$$\begin{aligned} lna_t &= \phi lna_{t-1} + \epsilon_t \\ lna_{ss} &= \phi lna_{ss} + \underbrace{\epsilon_{ss}}_{=0(\text{valor de su media})} \\ lna_{ss} &= \phi lna_{ss} \\ ln(a_{ss}) &= ln(a_{ss}^{\phi}) \\ a_{ss} &= a_{ss}^{\phi} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Dos valores de a_{ss} podrían resolver esta última ecuación (3.37): $a_{ss} = 1$ o $a_{ss} = 0$. Sin embargo, solo cuando $a_{ss} = 1$, el lna_{ss} existe. Por tanto, la solución correcta es $a_{ss} = 1$.

Con el fin de encontrar los estados estacionarios de las demás variables es necesario realizar algunas operaciones algebraicas adicionales.

Uniendo la oferta de trabajo, ecuación (3.30), con la demanda de trabajo, ecuación (3.34), por medio del salario real se tiene:

$$\underbrace{\frac{\theta c_{ss}}{1 - h_{ss}}}_{\text{oferta de trabajo}} = w_{ss} = \underbrace{\alpha \frac{y_{ss}}{h_{ss}}}_{\text{demanda de trabajo}} \tag{3.38}$$

Operando en la ecuación resultante:

$$\begin{aligned}
\frac{\theta c_{ss}}{1-h_{ss}} &= \alpha\frac{y_{ss}}{h_{ss}} \\
\frac{\theta h_{ss}}{1-h_{ss}} &= \alpha\frac{y_{ss}}{c_{ss}} \\
\frac{\theta h_{ss}}{1-h_{ss}} &= \alpha\frac{y_{ss}/k_{ss}}{c_{ss}/k_{ss}} \\
\text{De la ecuación} &: \text{(3.33) y (3.36)} \\
\frac{\theta h_{ss}}{1-h_{ss}} &= \alpha\frac{\frac{1}{\beta(1-\alpha)}}{\frac{1}{\beta(1-\alpha)}-1} \\
\frac{1-h_{ss}}{\theta h_{ss}} &= (\alpha^{-1})\frac{\frac{1}{\beta(1-\alpha)}-1}{\frac{1}{\beta(1-\alpha)}} \\
\frac{1}{h_{ss}}-1 &= \theta(\alpha^{-1})(1-\beta(1-\alpha)) \\
\frac{1}{h_{ss}} &= \theta(\alpha^{-1})(1-\beta(1-\alpha))+1 \\
h_{ss} &= \frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Dado que ya se tiene el valor de h_{ss}, entonces se puede hallar el capital de estado estacionario k_{ss} de la función de producción (ecuación (3.31)):

$$\begin{aligned}
y_{ss} &= a_{ss}^{\alpha}k_{ss}^{1-\alpha}h_{ss}^{\alpha} \\
\frac{y_{ss}}{k_{ss}} &= \left[\frac{h_{ss}}{k_{ss}}\right]^{\alpha} \\
\text{de la ecuación (3.33)} &: \\
\frac{1}{\beta(1-\alpha)} &= \left[\frac{h_{ss}}{k_{ss}}\right]^{\alpha} \\
\left[\frac{1}{\beta(1-\alpha)}\right]^{1/\alpha} &= \frac{h_{ss}}{k_{ss}} \\
k_{ss} &= h_{ss}\left[\frac{1}{\beta(1-\alpha)}\right]^{-1/\alpha} \\
k_{ss} &= \left[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\right][\beta(1-\alpha)]^{1/\alpha}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Dado que algunas variables se encuentran expresadas en ratio con respecto al capital, entonces su valor de estado estacionario se puede hallar en función del valor de estado estacionario del capital. De la ecuación (3.33) se halla el producto y_{ss}:

$$\begin{aligned}
\frac{y_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{1}{\beta(1-\alpha)} \\
y_{ss} &= k_{ss}\left[\frac{1}{\beta(1-\alpha)}\right] \\
y_{ss} &= \left[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\right]\left[\beta(1-\alpha)\right]^{\frac{1}{\alpha}-1} \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo en la ecuación (3.36) se halla el consumo c_{ss}:

$$\begin{aligned}
\frac{c_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{1}{\beta(1-\alpha)}-1 \\
c_{ss} &= k_{ss}\left[\frac{1}{\beta(1-\alpha)}-1\right] \\
c_{ss} &= \left[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\right]\left[\beta(1-\alpha)\right]^{1/\alpha}\left[\frac{1}{\beta(1-\alpha)}-1\right] \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

En la demanda de trabajo, ecuación (3.34), se sustituye y_{ss} y h_{ss} y se obtiene el salario de estado estacionario w_{ss}:

$$\begin{aligned}
w_{ss} &= \alpha\frac{y_{ss}}{h_{ss}} \\
w_{ss} &= \alpha\frac{\left[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\right]\left[\beta(1-\alpha)\right]^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}} \\
w_{ss} &= \alpha\left[\beta(1-\alpha)\right]^{\frac{1}{\alpha}-1} \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

En el cuadro [3.4] se resume la expresión del estado estacionario de cada variable del modelo.

Como se menciono antes, este modelo está basado en la calibración de King y Rebelo (2000). En ese estudio los autores asumen que el trabajo de estado estacionario h_{ss} es igual a 0.2. Bajo esta premisa, el valor del parámetro θ se calcula endógenamente de la expresión de estado estacionario del trabajo, el cual se deriva del modelo. Entonces bajo esta consideración se tiene:

$$\begin{aligned}
h_{ss} &= \frac{\alpha}{\theta(\underbrace{1-\beta(1-\alpha)}_{\eta})+\alpha} \\
h_{ss} &= \frac{\alpha}{\theta\eta+\alpha} \\
\text{Despejando } \theta &: \\
\theta\eta+\alpha &= \frac{\alpha}{h_{ss}} \\
\theta\eta &= \alpha(\frac{1}{h_{ss}}-1) \\
\theta &= \alpha\left(\frac{1-h_{ss}}{\eta h_{ss}}\right) \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Cuadro 3.4: Estado estacionario

Estado estacionario (forma recursiva)	Estado estacionario (forma paramétrica)	Valores
$r_{ss} = \frac{1}{\beta}$	$= \frac{1}{\beta}$	$r_{ss} = 1.0163$
$h_{ss} = \frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}$	$= \frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}$	$h_{ss} = 0.2$
$a_{ss} = 1$	$= 1$	$a_{ss} = 1$
$k_{ss} = h_{ss}\big[\frac{1}{\beta(1-\alpha)}\big]^{-1/\alpha}$	$= \big[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\big]\big[\beta(1-\alpha)\big]^{1/\alpha}$	$k_{ss} = 0.0375$
$i_{ss} = k_{ss}$	$= \big[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\big]\big[\beta(1-\alpha)\big]^{1/\alpha}$	$i_{ss} = 0.0375$
$y_{ss} = k_{ss}\big[\frac{1}{\beta(1-\alpha)}\big]$	$= \big[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\big]\big[\beta(1-\alpha)\big]^{\frac{1}{\alpha}-1}$	$y_{ss} = 0.1146$
$c_{ss} = k_{ss}\big[\frac{1}{\beta(1-\alpha)} - 1\big]$	$= \big[\frac{\alpha}{\theta(1-\beta(1-\alpha))+\alpha}\big]\big[\beta(1-\alpha)\big]^{1/\alpha}\big[\frac{1}{\beta(1-\alpha)} - 1\big]$	$c_{ss} = 0.077$
$w_{ss} = \alpha\frac{y_{ss}}{h_{ss}}$	$= \alpha\big[\beta(1-\alpha)\big]^{\frac{1}{\alpha}-1}$	$w_{ss} = 0.3821$

Nota: El cálculo de los estados estacionarios se encuentra en Long_Plosser_EstadoEstacionario.m.

3.5. Linealización vs Log-linealización

Un paso importante en el proceso de solución del modelo es linealizar o log-linealizar las ecuaciones del sistema. En estricto la técnica de linealización es única, lo que difere es la naturaleza de la variable, la cual en un caso está considerada en niveles y en otro caso en logarítmo. En términos prácticos se llamará a la primera linealización (variables en niveles) y a la segunda log-linealización (variable en logarítmo). En ambos casos se apróxima cada ecuación del modelo por medio de la expansión de Taylor de primer orden (Dejong y Dave, 2007).

3.5.1. Linealización (variable en niveles)

Paso 1: el primer paso consiste en ordenar cada ecuación del sistema de tal manera que el lado derecho de la ecuación sea igual a cero. Luego, el lado izquierdo de la ecuación renombrarla como una función que depende de las variables que aparecen en la ecuación. Por ejemplo, sea la siguiente expresión una ecuación del modelo:

$$\alpha x_t y_t = \beta y_t + \theta z_t \tag{3.45}$$

Se ordena los términos al lado izquierdo:

$$\alpha x_t y_t - \beta y_t - \theta z_t = 0 \tag{3.46}$$

Finalmente renombramos la ecuación como una función:

$$F(x_t, y_t, z_t) = \alpha x_t y_t - \beta y_t - \theta z_t = 0 \tag{3.47}$$

Paso 2: el segundo paso es aproximar la función [3.47] por medio de una expansión de Taylor de primer orden alrededor del estado estacionario.

$$\begin{aligned} F(x_t, y_t, z_t) &= \alpha x_t y_t - \beta y_t - \theta z_t = 0 \\ F(x_t, y_t, z_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial x_t}|_{ss}(x_t - x_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial y_t}|_{ss}(y_t - y_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial z_t}|_{ss}(z_t - z_{ss}) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Considerando que $F(\cdot)|_{ss} = 0$ y realizando un cambio de variable: $\widetilde{x}_t = x_t - x_{ss}$; donde $\widetilde{x}_t$ es la desviación de la variable (en niveles) con respecto a su estado estacionario. Aplicando este cambio de variable a la ecuación [3.48], se tiene:

$$\begin{aligned}
F(x_t, y_t, z_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial x_t}|_{ss}(x_t - x_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial y_t}|_{ss}(y_t - y_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial z_t}|_{ss}(z_t - z_{ss}) \\
F(x_t, y_t, z_t) &\approx 0 + \frac{\partial F}{\partial x_t}|_{ss}(\widetilde{x}_t) + \frac{\partial F}{\partial y_t}|_{ss}(\widetilde{y}_t) + \frac{\partial F}{\partial z_t}|_{ss}(\widetilde{z}_t) \\
F(x_t, y_t, z_t) &\approx (\alpha y_{ss})\widetilde{x}_t + (-\beta)\widetilde{y}_t + (-\theta)\widetilde{z}_t \\
\text{pero} &: F(x_t, y_t, z_t) = 0 \text{ ,entonces...} \\
0 = F(x_t, y_t, z_t) &\approx (\alpha y_{ss})\widetilde{x}_t + (-\beta)\widetilde{y}_t + (-\theta)\widetilde{z}_t \\
0 &= (\alpha y_{ss})\widetilde{x}_t + (-\beta)\widetilde{y}_t + (-\theta)\widetilde{z}_t \\
\alpha y_{ss}\widetilde{x}_t &= \beta\widetilde{y}_t + \theta\widetilde{z}_t \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

La ecuación (3.49) es la versión lineal de la ecuación (3.46). Aplicando esta técnica a cada ecuación del sistema no lineal se obtendrá el sistema lineal con las variables en niveles. Para el caso de la ecuación de Euler se tiene:

$$\begin{aligned}
F(c_t, c_{t+1}, r_{t+1}) &= \frac{1}{c_t} - \beta E_t\frac{r_{t+1}}{c_{t+1}} = 0 \\
\text{Extrayendo las expectativas} &: \\
E_tF(c_t, c_{t+1}, r_{t+1}) &= E_t(\frac{1}{c_t} - \beta\frac{r_{t+1}}{c_{t+1}}) = 0 \\
F(c_t, c_{t+1}, r_{t+1}) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial c_t}|_{ss}(c_t - c_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial c_{t+1}}|_{ss}(c_{t+1} - c_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial r_{t+1}}|_{ss}(r_{t+1} - r_{ss}) \\
F(c_t, c_{t+1}, r_{t+1}) &\approx 0 + \Big(-\frac{1}{c_{ss}^2}\Big)\widetilde{c}_t + \Big(\beta\frac{r_{ss}}{c_{ss}^2}\Big)\widetilde{c}_{t+1} + \Big(-\frac{\beta}{c_{ss}}\Big)\widetilde{r}_{t+1} \\
0 &= E_t\Big[\Big(-\frac{1}{c_{ss}^2}\Big)\widetilde{c}_t + \Big(\beta\frac{r_{ss}}{c_{ss}^2}\Big)\widetilde{c}_{t+1} + \Big(-\frac{\beta}{c_{ss}}\Big)\widetilde{r}_{t+1}\Big] \\
0 &= \Big(-\frac{1}{c_{ss}^2}\Big)\widetilde{c}_t + E_t\Big[\Big(\beta\frac{r_{ss}}{c_{ss}^2}\Big)\widetilde{c}_{t+1} + \Big(-\frac{\beta}{c_{ss}}\Big)\widetilde{r}_{t+1}\Big] \\
\Big(\frac{1}{c_{ss}^2}\Big)\widetilde{c}_t &= E_t\Big[\Big(\beta\frac{r_{ss}}{c_{ss}^2}\Big)\widetilde{c}_{t+1} + \Big(-\frac{\beta}{c_{ss}}\Big)\widetilde{r}_{t+1}\Big] \\
\widetilde{c}_t &= \beta E_t(r_{ss}\widetilde{c}_{t+1} - c_{ss}\widetilde{r}_{t+1}) \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Haciendo el mismo procedimiento de linealización para la ley de movimiento del capital:

$$\begin{aligned}
F(k_{t+1}, i_t) &= k_{t+1} - i_t = 0 \\
F(k_{t+1}, i_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial k_{t+1}}|_{ss}(k_{t+1} - k_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial i_t}|_{ss}(i_t - i_{ss}) \\
F(k_{t+1}, i_t) &\approx 0 + (1)\widetilde{k}_{t+1} + (-1)\widetilde{i}_t \\
0 &= \widetilde{k}_{t+1} + (-1)\widetilde{i}_t \\
\widetilde{k}_{t+1} &= \widetilde{i}_t \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Para la oferta de trabajo, la ecuación linealizada sería:

$$\begin{aligned}
F(h_t, w_t, c_t) &= \frac{\theta}{1-h_t} - \frac{w_t}{c_t} = 0 \\
F(h_t, w_t, c_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial h_t}|_{ss}(h_t - h_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial w_t}|_{ss}(w_t - w_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial c_t}|_{ss}(c_t - c_{ss}) \\
F(h_t, w_t, c_t) &\approx 0 + \frac{\theta}{(1-h_{ss})^2}\widetilde{h}_t + \frac{-1}{c_{ss}}\widetilde{w}_t + \frac{w_{ss}}{c_{ss}^2}\widetilde{c}_t \\
0 &= \frac{\theta}{(1-h_{ss})^2}\widetilde{h}_t - \frac{1}{c_{ss}}\widetilde{w}_t + \frac{w_{ss}}{c_{ss}^2}\widetilde{c}_t \\
\frac{1}{c_{ss}}\widetilde{w}_t &= \frac{\theta}{(1-h_{ss})^2}\widetilde{h}_t + \frac{w_{ss}}{c_{ss}^2}\widetilde{c}_t \\
\widetilde{w}_t &= \frac{w_{ss}}{(1-h_{ss})}\widetilde{h}_t + \frac{\theta}{1-h_{ss}}\widetilde{c}_t \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

De manera similar para la función de producción:

$$\begin{aligned}
F(y_t, a_t, k_t, h_t) &= y_t - a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha} = 0 \\
F(y_t, a_t, k_t, h_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial y_t}|_{ss}(y_t - y_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial a_t}|_{ss}(a_t - a_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial k_t}|_{ss}(k_t - k_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial h_t}|_{ss}(h_t - h_{ss}) \\
F(y_t, a_t, k_t, h_t) &\approx 0 + (\widetilde{y}_t) + (-k_{ss}^{1-\alpha} h_{ss}^{\alpha})(\widetilde{a}_t) + (-(1-\alpha) a_{ss} k_{ss}^{-\alpha} h_{ss}^{\alpha})(\widetilde{k}_t) + (-\alpha a_{ss} k_{ss}^{1-\alpha} h_{ss}^{\alpha-1})(\widetilde{h}_t) \\
0 &= \widetilde{y}_t - \frac{y_{ss}}{a_{ss}}\widetilde{a}_t - (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\widetilde{k}_t - \alpha\frac{y_{ss}}{h_{ss}}\widetilde{h}_t \\
\widetilde{y}_t &= \frac{y_{ss}}{a_{ss}}\widetilde{a}_t + (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\widetilde{k}_t + \alpha\frac{y_{ss}}{h_{ss}}\widetilde{h}_t \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo para demanda de capital:

$$\begin{aligned}
F(r_t, y_t, k_t) &= r_t - (1-\alpha)\frac{y_t}{k_t} = 0 \\
F(r_t, y_t, k_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial r_t}|_{ss}(r_t - r_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial y_t}|_{ss}(y_t - y_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial k_t}|_{ss}(k_t - k_{ss}) \\
F(r_t, y_t, k_t) &\approx 0 + (1)\widetilde{r}_t + \frac{-(1-\alpha)}{k_{ss}}\widetilde{y}_t + \frac{(1-\alpha)y_{ss}}{k_{ss}^2}\widetilde{k}_t \\
0 &= (1)\widetilde{r}_t + \frac{-(1-\alpha)}{k_{ss}}\widetilde{y}_t + \frac{(1-\alpha)y_{ss}}{k_{ss}^2}\widetilde{k}_t \\
\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\widetilde{k}_t &= \widetilde{y}_t - \frac{k_{ss}}{1-\alpha}\widetilde{r}_t \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

De igual forma para la demanda de trabajo:

$$
\begin{aligned}
F(w_t, y_t, h_t) &= w_t - \alpha \frac{y_t}{h_t} = 0 \\
F(w_t, y_t, h_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial w_t}|_{ss}(w_t - w_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial y_t}|_{ss}(y_t - y_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial h_t}|_{ss}(h_t - h_{ss}) \\
F(w_t, y_t, h_t) &\approx 0 + (1)\widetilde{w}_t + \left(\frac{-\alpha}{h_{ss}}\right)\widetilde{y}_t + \left(\frac{\alpha y_{ss}}{h_{ss}^2}\right)\widetilde{h}_t \\
0 &= \widetilde{w}_t - \left(\frac{\alpha}{h_{ss}}\right)\widetilde{y}_t + \left(\frac{\alpha y_{ss}}{h_{ss}^2}\right)\widetilde{h}_t \\
\widetilde{w}_t &= \left(\frac{\alpha}{h_{ss}}\right)\widetilde{y}_t - \left(\frac{\alpha y_{ss}}{h_{ss}^2}\right)\widetilde{h}_t \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

Para la ecuación de equilibrio en el mercado de bienes:

$$
\begin{aligned}
F(y_t, c_t, i_t) &= y_t - c_t - i_t = 0 \\
F(y_t, c_t, i_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial y_t}|_{ss}(y_t - y_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial c_t}|_{ss}(c_t - c_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial i_t}|_{ss}(i_t - i_{ss}) \\
F(y_t, c_t, i_t) &\approx 0 + (1)\widetilde{y}_t + (-1)\widetilde{c}_t + (-1)\widetilde{i}_t \\
\widetilde{y}_t &= \widetilde{c}_t + \widetilde{i}_t \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

Finalmente para el choque de productividad:

$$
\begin{aligned}
F(a_t, a_{t-1}, \epsilon_t) &= ln a_t - \phi ln a_{t-1} - \epsilon_t = 0 \\
F(a_t, a_{t-1}, \epsilon_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial a_t}|_{ss}(a_t - a_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial a_{t-1}}|_{ss}(a_{t-1} - a_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_t}|_{ss}(\epsilon_t - \epsilon_{ss}) \\
\text{Considerando} &: \epsilon_{ss} = 0 \\
F(a_t, a_{t-1}, \epsilon_t) &\approx 0 + \frac{1}{a_{ss}}\widetilde{a}_t + (-\frac{\phi}{a_{ss}})\widetilde{a}_{t-1} + (-1)\epsilon_t \\
0 &= \frac{1}{a_{ss}}\widetilde{a}_t + (-\frac{\phi}{a_{ss}})\widetilde{a}_{t-1} + (-1)\epsilon_t \\
\frac{1}{a_{ss}}\widetilde{a}_t &= (\frac{\phi}{a_{ss}})\widetilde{a}_{t-1} + \epsilon_t \\
\text{Dado que} &: a_{ss} = 1 \\
\widetilde{a}_t &= \phi\widetilde{a}_{t-1} + \epsilon_t \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

El cuadro [3.5] resume las ecuaciones linealizadas del modelo.

3.5.2. Linealización (variables en logarítimo) o Log-linealización

Es usual considerar la log-linearización del modelo debido a que las variables transformadas están expresadas como la desviación porcentual de su estado estacionario. Es decir:

$$\widehat{x}_t = ln(x_t) - ln(x_{ss})$$

En ese contexto, los coeficientes de la solución del sistema lineal se interpretan como elasticidades. Esta técnica fue inicialmente propuesto por King et al (1987) y Campbell

Cuadro 3.5: Sistema de ecuaciones lineal del modelo (Long y Plosser, 1983)

Agente	Ecuaciones	Descripción
Familia	$\widetilde{c}_t = \beta E_t(r_{ss}\widetilde{c}_{t+1} - c_{ss}\widetilde{r}_{t+1})$	Ecuación de Euler
	$\widetilde{k}_{t+1} = \widetilde{i}_t$	Ley de movimiento del capital
	$\widetilde{w}_t = \frac{w_{ss}}{(1-h_{ss})}\widetilde{h}_t + \frac{\theta}{1-h_{ss}}\widetilde{c}_t$	Oferta de trabajo
Empresa	$\widetilde{y}_t = \frac{y_{ss}}{a_{ss}}\widetilde{a}_t + (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\widetilde{k}_t + \alpha\frac{y_{ss}}{a_{ss}}\widetilde{h}_t$	Función de producción
	$\frac{y_{ss}}{k_{ss}}\widetilde{k}_t = \widetilde{y}_t - \frac{k_{ss}}{1-\alpha}\widetilde{r}_t$	Demanda del capital
	$\widetilde{w}_t = \left(\frac{\alpha}{h_{ss}}\right)\widetilde{y}_t - \left(\frac{\alpha y_{ss}}{h_{ss}^2}\right)\widetilde{h}_t$	Demanda de trabajo
Equilibrio	$\widetilde{y}_t = \widetilde{c}_t + \widetilde{i}_t$	Equilibrio mercado de bienes
Choque	$\widetilde{a}_t = \phi\widetilde{a}_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

(1994).

Para log-linearizar el sistema no lineal se puede aplicar dos formas. La primera es siguiendo el mismo camino descrito en la sección previa pero con una variante. La forma estándar sugiere que los términos de la ecuación son llevados al lado izquierdo y luego es renombrada por una función (que depende de las variables de la ecuación), para finalmente aplicar una apróximación de esta función por medio de la expansión de Taylor de primer orden. La variante es que primero se tiene que aplicar logarítmo a ambos lados de cada ecuación y luego procurar expresar cada variable en logarítmo; por ejemplo, el consumo c_t está en niveles, para que esté en logarítmo se puede hacer lo siguiente: e^{lnc_t}.

La segunda forma es propuesta por Uhlig (1997), la cual es mucho más práctica. La propuesta de Uhlig (1997) consiste en reemplazar cada una de las variables por su log-desviación ($x_t = x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$) y luego considerar tres propiedades de aproximación, las cuales se mencionan mas adelante.

Cabe mencionar que para el modelo de este capítulo en particular ambas formas de log-linealizar no representan diferencia en esfuerzo. La propuesta de Uhlig (1997) gana mayor importancia en cuanto a practicidad a medida que el modelo es más complejo. Por ejemplo, el modelo del capítulo 5 hacia adelante puede ser log-linealizado rápidamente y con poco esfuerzo por medio de la técnica de Uhlig en comparación con el camino estándar.

Método estándar: debido a los supuestos del modelo de Long y Plosser (1983), algunas ecuaciones no requeriran una apróximación de Taylor de primer orden sino que será sencillo obtener la ecuación expresada en log-desviaciones. En estos casos bastará colocar la ecuación en logarítmo y restar la ecuación en estado estacionario. Dichas ecuaciones son: la ley de movimiento del capital, la función de producción, la demada de capital, la demanda de trabajo y la productividad. Para el caso de la ecuación de Euler, la oferta de trabajo y la ecuación de equilibrio del mercado de bienes sí se requiere aplicar la expansión de Taylor. Claramente, a medida que el modelo sea más complejo la aplicación de la

expansión de Taylor será más requerida.

Para la ecuación de Euler se tiene lo siguiente: en primer lugar se toma logarítmos en ambos lados de la ecuación (ecuación (3.58)), luego se lleva todos los elementos de esta ecuación a la lado izquierdo y se renombra como una función de las variables endógenas que aparecen en esta ecuación. En este caso en particular la función es $f(lnr_{t+1}, lnc_{t+1}, lnc_t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_t} &= \beta E_t \frac{r_{t+1}}{c_{t+1}} \\
ln\left[\frac{1}{c_t}\right] &= E_t ln\left[\beta \frac{r_{t+1}}{c_{t+1}}\right] && (3.58) \\
-lnc_t &= E_t[ln\beta + lnr_{t+1} - lnc_{t+1}] \\
E_t[ln\beta + lnr_{t+1} - lnc_{t+1}] + lnc_t &= 0 \\
F(lnr_{t+1}, lnc_{t+1}, lnc_t) &= E_t[ln\beta + lnr_{t+1} - lnc_{t+1} + lnc_t] = 0 \\
F(lnr_{t+1}, lnc_{t+1}, lnc_t) &= 0 && (3.59)
\end{aligned}$$

El paso siguiente es aproximar la función "$F(\cdot)$" por medio de una expansión de Taylor de primer order.

$$\begin{aligned}
F(lnr_{t+1}, lnc_{t+1}, lnc_t) &\approx E_t\big[F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial lnr_{t+1}}|_{ss}(lnr_{t+1} - lnr_{ss}) + \\
&\quad \frac{\partial F}{\partial lnc_{t+1}}|_{ss}(lnc_{t+1} - lnc_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial lnc_t}|_{ss}(lnc_t - lnc_{ss})\big] \\
F(y_t, c_t, i_t) &\approx E_t\big[0 + (1)(lnr_{t+1} - lnr_{ss}) + (-1)(lnc_{t+1} - lnc_{ss}) + (1)(lnc_t - lnc_{ss})\big] \\
F(y_t, c_t, i_t) &\approx E_t\big[\widehat{r}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1} + \widehat{c}_t\big] \\
\widehat{c}_t &= E_t\big[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{r}_{t+1}\big] && (3.60)
\end{aligned}$$

Con respecto a la ley de movimiento del capital se procede de la misma manera que en la ecuación de Euler excepto que no es necesario aplicar la aproximación de Taylor.

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= i_t \\
lnk_{t+1} &= lni_t \\
lnk_{ss} &= lni_{ss} \\
lnk_{t+1} - lnk_{ss} &= lni_t - lni_{ss} \\
\widehat{k}_{t+1} &= \widehat{i}_t && (3.61)
\end{aligned}$$

En el caso de la oferta de trabajo.

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{1-h_t} &= \frac{w_t}{c_t} \\
ln\frac{\theta}{1-h_t} &= ln\frac{w_t}{c_t} \\
ln\theta - ln(1-h_t) &= lnw_t - lnc_t \qquad (3.62)\\
ln\theta - ln(1-h_{ss}) &= lnw_{ss} - lnc_{ss} \qquad (3.63)\\
(3.62) - (3.63) &: \\
-ln(1-h_t) + ln(1-h_{ss}) &= lnw_t - lnc_t - lnw_{ss} + lnc_{ss} \\
\text{ordenando} &: \\
-ln(1-h_t) + ln(1-h_{ss}) &= (lnw_t - lnw_{ss}) - (lnc_t - lnc_{ss}) \\
-ln(1-h_t) + ln(1-h_{ss}) &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

Para que la ecuación (3.64) esté totalmente log-linealizada falta expresar el trabajo como su log-desviación de su estado estacionario. Para ello se hará lo siguiente:

$$ln(1-h_t) = ln(1-e^{lnh_t})$$

Esta expresión se aproxima por medio de la expansión de Taylor de primer orden:

$$\begin{aligned}
g(lnh_t) = ln(1-e^{lnh_t}) &\approx g(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial g}{\partial lnh_t}|_{ss}(lnh_t - lnh_{ss}) \\
ln(1-e^{lnh_t}) &\approx ln(1-e^{lnh_{ss}}) + \left[\frac{-e^{lnh_t}}{1-e^{lnh_t}}\right](lnh_t - lnh_{ss}) \\
ln(1-e^{lnh_t}) &\approx ln(1-h_{ss}) - \left[\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\right](lnh_t - lnh_{ss}) \\
ln(1-e^{lnh_t}) &\approx ln(1-h_{ss}) - \left[\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\right]\widehat{h}_t \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación (3.65) en (3.64) se obtiene la expresión log-lineal de la oferta de trabajo.

$$\begin{aligned}
-ln(1-h_t) + ln(1-h_{ss}) &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\
-ln(1-h_{ss}) + \left[\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\right]\widehat{h}_t + ln(1-h_{ss}) &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\
\left[\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\right]\widehat{h}_t &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

Para obtener la forma log-lineal de la función de producción basta con aplicar logarítmo a la función de producción y luego evaluarla en sus estado estacionario para finalmente restar ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned}
y_t &= a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha} \\
lny_t &= lna_t + (1-\alpha)lnk_t + \alpha h_t && (3.67) \\
lny_{ss} &= lna_{ss} + (1-\alpha)lnk_{ss} + \alpha h_{ss} && (3.68) \\
(3.67) - (3.68) &: \\
lny_t - lny_{ss} &= lna_t - lna_{ss} + (1-\alpha)lnk_t - (1-\alpha)lnk_{ss} + \alpha h_t - \alpha h_{ss} \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + \alpha\widehat{h}_t && (3.69)
\end{aligned}$$

La demanda de trabajo sigue los mismos pasos que la función de producción.

$$\begin{aligned}
w_t &= \alpha\frac{y_t}{h_t} \\
lnw_t &= ln\alpha + lny_t - lnh_t && (3.70) \\
lnw_{ss} &= ln\alpha + lny_{ss} - lnh_{ss} && (3.71) \\
(3.70) - (3.71) &: \\
lnw_t - lnw_{ss} &= lny_t - lny_{ss} - lnh_t + lnh_{ss} \\
\widehat{w}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t && (3.72)
\end{aligned}$$

Con respecto a la demanda del capital se obtiene:

$$\begin{aligned}
r_t &= (1-\alpha)\frac{y_t}{k_t} \\
lnr_t &= ln(1-\alpha) + lny_t - lnk_t && (3.73) \\
lnr_{ss} &= ln(1-\alpha) + lny_{ss} - lnk_{ss} && (3.74) \\
(3.73) - (3.74) &: \\
lnr_t - lnr_{ss} &= lny_t - lny_{ss} - lnk_t + lnk_{ss} \\
\widehat{r}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{k}_t && (3.75)
\end{aligned}$$

Para la ecuación de equilibrio de mercado se tiene:

$$\begin{aligned}
y_t &= c_t + i_t \\
lny_t &= ln(c_t + i_t) \\
lny_t - ln(c_t + i_t) &= 0 && (3.76)
\end{aligned}$$

Debido a que se desea que las variables esten expresadas en logarítmo se realiza el siguiente artificio: cada variable x_t se expresa como e^{lnx_t}. Aplicando este artificio a la ecuación (3.76):

$$\begin{aligned}
lny_t - ln(c_t + i_t) &= 0 \\
lny_t - ln(e^{lnc_t} + e^{lni_t}) &= 0 \\
F(y_t, c_t, i_t) &= lny_t - ln(e^{lnc_t} + e^{lni_t}) = 0 && (3.77)
\end{aligned}$$

Apróximando $F(y_t, c_t, i_t)$ por medio de la expansión de Taylor de primer orden se tiene:

$$
\begin{aligned}
F(y_t, c_t, i_t) &\approx F(\cdot)|_{ss} + \frac{\partial F}{\partial lny_t}|_{ss}(lny_t - lny_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial lnc_t}|_{ss}(lnc_t - lnc_{ss}) + \frac{\partial F}{\partial lni_t}|_{ss}(lni_t - lni_{ss}) \\
F(y_t, c_t, i_t) &\approx 0 + (1)(lny_t - lny_{ss}) + \frac{-e^{lnc_{ss}}}{e^{lnc_{ss}} + e^{lni_{ss}}}(lnc_t - lnc_{ss}) + \frac{-e^{lni_{ss}}}{e^{lnc_{ss}} + e^{lni_{ss}}}(lni_t - lni_{ss}) \\
&\approx \widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{c_{ss} + i_{ss}}\widehat{c}_t - \frac{i_{ss}}{c_{ss} + i_{ss}}\widehat{i}_t \\
&\approx \widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t - \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \\
\widehat{y}_t &\approx \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \qquad (3.78)
\end{aligned}
$$

Finalmente para la ecuación de productividad.

$$
\begin{aligned}
lna_t &= \phi lna_{t-1} + \epsilon_t \\
\text{Se sabe} &: lna_{ss} = 0 \\
lna_t - lna_{ss} &= \phi lna_{t-1} - \phi lna_{ss} + \epsilon_t \\
\widehat{a}_t &= \phi \widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \qquad (3.79)
\end{aligned}
$$

Método de Uhilg (1997): se define $\widehat{x}_t$ como la log-desviación de la variable x_t con respecto a su valor de estado estacionario (x_{ss}):

$$\widehat{x}_t = ln(x_t) - ln(x_{ss}) \qquad (3.80)$$

De lo anterior se obtiene:

$$x_t = x_{ss}e^{\widehat{x}_t} \qquad (3.81)$$

Además, se sabe que para pequeñas desviaciones del estado estacionario se cumple que:

$$\text{1era propiedad} : e^{\widehat{x}_t} \approx 1 + \widehat{x}_t \qquad (3.82)$$

Esta primera propiedad se obtiene al aplicar una aproximación de Taylor de primer orden, la cual se explica a continuación.

Aproximación de Taylor (1er orden): aproximar la función $f(\widehat{x}_t)$ alrededor de su estado estacionario $\widehat{x}_{ss}$:

$$f(\widehat{x}_t) \approx f(\widehat{x}_{ss}) + \frac{f'(\widehat{x}_{ss})}{1!}(\widehat{x}_t - \widehat{x}_{ss}) + \frac{f''(\widehat{x}_{ss})}{2!}(\widehat{x}_t - \widehat{x}_{ss})^2 + ...$$

Considerando una aproximación de 1er orden:

$$f(\widehat{x}_t) \approx f(\widehat{x}_{ss}) + \frac{f'(\widehat{x}_{ss})}{1!}(\widehat{x}_t - \widehat{x}_{ss})$$

Si $f(\widehat{x}_t) = e^{\widehat{x}_t}$, entonces (sabiendo que $\widehat{x}_{ss} = 0$, porque $\widehat{x}_t = x_t - x_{ss}$):

$$\begin{aligned} e^{\widehat{x}_t} &\approx e^{\widehat{x}_{ss}} + e^{\widehat{x}_{ss}}(\widehat{x}_t - \widehat{x}_{ss}) \\ e^{\widehat{x}_t} &\approx 1 + (\widehat{x}_t - \widehat{x}_{ss}) \\ e^{\widehat{x}_t} &\approx 1 + \widehat{x}_t \end{aligned}$$

Dos propiedades adicionales son importantes:

$$\text{2da propiedad} \ : \ \widehat{x}_t \widehat{y}_t \approx 0 \qquad (3.83)$$

$$\text{2da propiedad} \ : \ E_t[ae^{\widehat{x}_{t+1}}] = E_t[a\widehat{x}_{t+1}] + a \qquad (3.84)$$

Aplicando estas propiedades se procede a log-linealizar el sistema descrito en el cuadro [3.3]:

Para la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} c_t^{-1} &= \beta E_t c_{t+1}^{-1} r_{t+1} \\ \left[c_{ss} e^{\widehat{c}_t}\right]^{-1} &= \beta E_t \left[c_{ss} e^{\widehat{c}_{t+1}}\right]^{-1} \left[r_{ss} e^{\widehat{r}_{t+1}}\right] \\ e^{-\widehat{c}_t} &= E_t e^{-\widehat{c}_{t+1}} e^{\widehat{r}_{t+1}} \\ e^{-\widehat{c}_t} &= E_t e^{-\widehat{c}_{t+1} + \widehat{r}_{t+1}} \\ 1 - \widehat{c}_t &= E_t \left[1 - \widehat{c}_{t+1} + \widehat{r}_{t+1}\right] \\ \widehat{c}_t &= E_t \left[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{r}_{t+1}\right] \qquad (3.85) \end{aligned}$$

La ley de moviento de capital en su forma log-lineal quedaría:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= i_t \\ k_{ss} e^{\widehat{k}_{t+1}} &= i_{ss} e^{\widehat{i}_t} \\ k_{ss}(1 + \widehat{k}_{t+1}) &= i_{ss}(1 + \widehat{i}_t) \\ k_{ss} + k_{ss}\widehat{k}_{t+1} &= i_{ss} + i_{ss}\widehat{i}_t \\ k_{ss}\widehat{k}_{t+1} &= i_{ss}\widehat{i}_t \\ \text{como} &: k_{ss} = i_{ss} \\ \widehat{k}_{t+1} &= \widehat{i}_t \qquad (3.86) \end{aligned}$$

Para la oferta de trabajo:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{1 - h_t} &= \frac{w_t}{c_t} \\ \text{Recordando} &: 1 - h_t = l_t \\ \frac{\theta}{l_t} &= \frac{w_t}{c_t} \\ \frac{\theta}{l_{ss} e^{\widehat{l}_t}} &= \frac{w_{ss} e^{\widehat{w}_t}}{c_{ss} e^{\widehat{c}_t}} \\ e^{-\widehat{l}_t} &= e^{\widehat{w}_t - \widehat{c}_t} \\ 1 - \widehat{l}_t &= 1 + \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\ \widehat{l}_t &= \widehat{c}_t - \widehat{w}_t \qquad (3.87) \end{aligned}$$

Para terminar de obtener la oferta de trabajo en su versión log-lineal es necesario obtener la relación log-lineal entre el ocio l_t y el trabajo h_t:

$$l_t = 1 - h_t$$

Log-linealizando esta expresión:

$$\begin{aligned}
l_t &= 1 - h_t \\
l_{ss} e^{\widehat{l}_t} &= 1 - h_{ss} e^{\widehat{h}_t} \\
l_{ss}(1 + \widehat{l}_t) &= 1 - h_{ss}(1 + \widehat{h}_t) \\
l_{ss} + l_{ss}\widehat{l}_t &= 1 - h_{ss} - h_{ss}\widehat{h}_t \\
l_{ss}\widehat{l}_t &= -h_{ss}\widehat{h}_t \\
\widehat{l}_t &= -\frac{h_{ss}}{l_{ss}}\widehat{h}_t \\
\widehat{l}_t &= -\frac{h_{ss}}{1 - h_{ss}}\widehat{h}_t \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

Introduciendo (3.88) en (3.87) se obtiene la oferta de trabajo log-lineal:

$$\begin{aligned}
\widehat{l}_t &= \widehat{c}_t - \widehat{w}_t \\
-\frac{h_{ss}}{1 - h_{ss}}\widehat{h}_t &= \widehat{c}_t - \widehat{w}_t \\
\frac{h_{ss}}{1 - h_{ss}}\widehat{h}_t &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \qquad (3.89)
\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo para la función de producción:

$$\begin{aligned}
y_t &= a_t k_t^{1-\alpha} h_t^{\alpha} \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= \left[a_{ss} e^{\widehat{a}_t}\right]\left[k_{ss} e^{\widehat{k}_t}\right]^{1-\alpha}\left[h_{ss} e^{\widehat{h}_t}\right]^{\alpha} \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= a_{ss} e^{\widehat{a}_t} k_{ss}^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)\widehat{k}_t} h_{ss}^{\alpha} e^{\alpha\widehat{h}_t} \\
e^{\widehat{y}_t} &= e^{\widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + \alpha\widehat{h}_t} \\
1 + \widehat{y}_t &= 1 + \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + \alpha\widehat{h}_t \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + +\alpha\widehat{h}_t \qquad (3.90)
\end{aligned}$$

Con respecto a la demanda de capital:

$$
\begin{aligned}
r_t &= (1-\alpha)\left(\frac{y_t}{k_t}\right) \\
r_{ss}e^{\widehat{r}_t} &= (1-\alpha)\left(\frac{y_{ss}e^{\widehat{y}_t}}{k_{ss}e^{\widehat{k}_t}}\right) \\
r_{ss}e^{\widehat{r}_t} &= (1-\alpha)\left(\frac{y_{ss}e^{\widehat{y}_t-\widehat{k}_t}}{k_{ss}}\right) \\
e^{\widehat{r}_t} &= e^{\widehat{y}_t-\widehat{k}_t} \\
1+\widehat{r}_t &= 1+\widehat{y}_t-\widehat{k}_t \\
\widehat{r}_t &= \widehat{y}_t-\widehat{k}_t
\end{aligned} \tag{3.91}
$$

Para la demanda de trabajo

$$
\begin{aligned}
w_t &= \alpha\frac{y_t}{h_t} \\
w_{ss}e^{\widehat{w}_t} &= \alpha\frac{y_{ss}e^{\widehat{y}_t}}{h_{ss}e^{\widehat{h}_t}} \\
e^{\widehat{w}_t} &= \frac{e^{\widehat{y}_t}}{e^{\widehat{h}_t}} \\
e^{\widehat{w}_t} &= e^{\widehat{y}_t-\widehat{h}_t} \\
1+\widehat{w}_t &= 1+\widehat{y}_t-\widehat{h}_t \\
\widehat{w}_t &= \widehat{y}_t-\widehat{h}_t
\end{aligned} \tag{3.92}
$$

En el equilibrio de mercado de bienes:

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t+i_t \\
y_{ss}e^{\widehat{y}_t} &= c_{ss}e^{\widehat{c}_t}+i_{ss}e^{\widehat{i}_t} \\
y_{ss}(1+\widehat{y}_t) &= c_{ss}(1+\widehat{c}_t)+i_{ss}(1+\widehat{i}_t) \\
y_{ss}+y_{ss}\widehat{y}_t &= c_{ss}+c_{ss}\widehat{c}_t+i_{ss}+i_{ss}\widehat{i}_t \\
y_{ss}\widehat{y}_t &= c_{ss}\widehat{c}_t+i_{ss}\widehat{i}_t \\
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t+\frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t
\end{aligned} \tag{3.93}
$$

Finalmente, la ecuación de la productividad:

$$
\begin{aligned}
lna_t &= \phi lna_{t-1}+\epsilon_t \\
lna_{ss}e^{\widehat{a}_t} &= \phi lna_{ss}e^{\widehat{a}_{t-1}}+\epsilon_t \\
lna_{ss}+\widehat{a}_t &= \phi lna_{ss}+\phi\widehat{a}_{t-1}+\epsilon_t \\
\widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1}+\epsilon_t
\end{aligned} \tag{3.94}
$$

El cuadro [3.6] resume las ecuaciones log-lineal del modelo obtenidas por las dos formas (método estándar o la propuesta de Uhilg):

Cuadro 3.6: Ecuaciones log-lineal

	Ecuaciones log-lineal	Descripción
[1]	$\widehat{c}_t = E_t\left[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{r}_{t+1}\right]$	Ecuación de Euler
[2]	$\widehat{k}_{t+1} = \widehat{i}_t$	Ley de movimiento del capital
[3]	$\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t = \widehat{w}_t - \widehat{c}_t$	Oferta de trabajo
[4]	$\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + \alpha\widehat{h}_t$	Función de producción
[5]	$\widehat{r}_t = \widehat{y}_t - \widehat{k}_t$	Demanda de capital
[6]	$\widehat{w}_t = \widehat{y}_t - \widehat{h}_t$	Demanda de trabajo
[7]	$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t$	Equilibrio en el mercado de bienes
[8]	$\widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

Nota: Para obtener directamente la solución del modelo con Dynare se puede utilizar el mod "Long_Plosser_Dynare_lineal_log.mod" del capítulo 2.

3.6. Solución del sistema lineal

La solución del sistema lineal consiste en encontrar las funciones de políticas; es decir, las variables de control en función de las variables de estado y variables exógenas. En este modelo la variable de estado es el capital k_t y la variable exógena es la productividad a_t. La idea es encontrar, por ejemplo, para el consumo:

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t$$

De manera similar para todas las variables endógenas: $\widehat{y}_t$, $\widehat{c}_t$, $\widehat{i}_t$, $\widehat{k}_{t+1}$, $\widehat{h}_t$, $\widehat{w}_t$ y $\widehat{r}_t$. En la literatura existe varias formas de resolver el sistema de ecuaciones en diferencias estocásticas. Dejong y Dave (2007) sugieren que al menos cuatro métodos son usuales: método de Blanchard y Kahn (1983), método de Sim (2001), método de Klein (2000) y el método de coeficientes indeterminados de Uhlig (1999). Este capítulo se concentra en los dos más usuales: método de Blanchard y Kahn, y el método de coefientes indeterminados. Sin embargo, antes de describir y aplicar ambos métodos, se resolverá el modelo de Long y Plosser analíticamente. Esta solución analítica es factible debido a que las no linealidades desaparecen a causa de los dos supuestos del modelo: depreciación total y utilidad logarítmica.

3.6.1. Método analítico

En primer lugar se procura disminuir la dimensión del sistema de ecuaciones lineales mediante la unión de algunas ecuaciones. Empezamos con el equilibrio en el mercado de trabajo (eliminamos $\widehat{w}_t$). Del cuadro [3.4] unimos la ecuación [3] y [6]:

$$\begin{aligned} \frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t + \widehat{c}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t \\ \frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{c}_t \end{aligned} \tag{3.95}$$

Luego se elimina la inversión $\widehat{i}_t$ al reemplazar la ecuación [2] en [7]:

$$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t$$
$$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{k}_{t+1} \tag{3.96}$$

Introduciendo la tasa de interés real (ecuación [5]) en la ecuación de Euler (ecuación [1]):

$$\widehat{c}_t = E_t\big[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{r}_{t+1}\big]$$
$$\widehat{c}_t = E_t\big[\widehat{c}_{t+1} - (\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1})\big]$$
$$\widehat{c}_t = E_t\big[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{y}_{t+1} + \widehat{k}_{t+1}\big] \tag{3.97}$$

Pero de la ecuación (3.95) se sabe que:

$$\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t = \widehat{y}_t - \widehat{c}_t$$
$$\widehat{c}_t - \widehat{y}_t = -\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t$$
$$\widehat{c}_{t+1} - \widehat{y}_{t+1} = -\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_{t+1} \tag{3.98}$$

Reemplazando la ecuación (3.98) en la ecuación de Euler (ecuación (3.97)):

$$\widehat{c}_t = E_t\big[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{y}_{t+1} + \widehat{k}_{t+1}\big]$$
$$\widehat{c}_t = E_t\big[-\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_{t+1} + \widehat{k}_{t+1}\big] \tag{3.99}$$

Además, de la ecuación (3.96) se despeja el capital en "$t+1$":

$$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{k}_{t+1}$$
$$\widehat{k}_{t+1} = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t) \tag{3.100}$$

Esta última expresión se reemplaza en la ecuación de Euler (ecuación (3.99)):

$$
\begin{aligned}
\widehat{c}_t &= E_t\big[-\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_{t+1}+\widehat{k}_{t+1}\big] \\
\widehat{c}_t &= E_t\big[-\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_{t+1}+\frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\widehat{y}_t-\frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t)\big] \\
\widehat{c}_t-\frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\widehat{y}_t-\frac{c_{ss}}{i_{ss}}\widehat{c}_t) &= E_t\big[-\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_{t+1}\big] \\
\widehat{c}_t\frac{(c_{ss}+i_{ss})}{i_{ss}}-\frac{y_{ss}}{i_{ss}}\widehat{y}_t &= E_t\big[-\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_{t+1}\big] \\
\widehat{c}_t\frac{y_{ss}}{i_{ss}}-\frac{y_{ss}}{i_{ss}}\widehat{y}_t &= E_t\big[-\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_{t+1}\big] \\
\frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\widehat{c}_t-\widehat{y}_t) &= E_t\big[-\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_{t+1}\big] \\
\frac{y_{ss}}{i_{ss}}\left(-\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t\right) &= E_t\big[-\frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_{t+1}\big] \\
\frac{y_{ss}}{i_{ss}}\widehat{h}_t &= E_t\widehat{h}_{t+1} \\
\underbrace{\frac{1}{\beta(1-\alpha)}}_{=\phi_h>1}\widehat{h}_t &= E_t\widehat{h}_{t+1} \qquad (3.101)
\end{aligned}
$$

Por un momento evaluemos la ecuación (3.64) sin el operador expectativa:

$$\phi_h\widehat{h}_t=\widehat{h}_{t+1} \qquad (3.102)$$

Debido a que ϕ_h es mayor a uno, entonces esta ecuación es explosiva. La única solución estable es cuando $\widehat{h}_t=0$. Esto implica que la solución del modelo para el trabajo es que esta variable se mantiene en su estado estacionario: como $\widehat{h}_t=0$, entonces, $lnh_t-lnh_{ss}=0$, lo cual implica que $lnh_t=lnh_{ss}$ y por tanto: $h_t=h_{ss}$.

Por tanto, la función de política del trabajo $\widehat{h}_t$ es $\widehat{h}_t=0$. Dos conclusiones importantes emergen de esta última ecuación. Primero, no fue necesario utilizar el método de coeficientes indeterminados para obtener la solución de $\widehat{h}_t$, y como veremos más adelante, de las demás variables. Esto es debido a que los dos supuestos del modelo de Long y Plosser (1983), depreciación total y utilidad logarítmica, eliminan no linealidades del sistema de ecuaciones. Esto permite que el modelo pueda ser resuelto directamente. Segundo, el trabajo $\widehat{h}_t$ no depende de la variable exógena $\widehat{a}_t$ ni de la variable de estado $\widehat{k}_t$. Esto indica que un incremento de la productividad no afecta al trabajo ni directamente ni indirectamente por medio del capital.

Para encontrar la solución del resto de variables se revisa sus ecuaciones de comportamiento. En primer lugar se revisa la función de producción log-lineal:

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + \alpha\widehat{h}_t \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + 0 \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \underbrace{(1-\alpha)}_{\eta_{yk}}\widehat{k}_t \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t
\end{aligned} \tag{3.103}$$

De la demanda de capital se obtiene la solución para la tasa de interés real $\widehat{r}_t$:

$$\begin{aligned}
\widehat{r}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{k}_t \\
\text{De la ecuación (3.103)} &: \\
\widehat{r}_t &= \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t - \widehat{k}_t \\
\widehat{r}_t &= \underbrace{(\eta_{yk}-1)}_{\eta_{rk}}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \\
\widehat{r}_t &= \eta_{rk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t
\end{aligned} \tag{3.104}$$

En la demanda de trabajo se obtiene el salario real $\widehat{w}_t$:

$$\begin{aligned}
\widehat{w}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t \\
\text{De la solución} &: \text{ecuación (3.103) y } \widehat{h}_t = 0 \\
\widehat{w}_t &= \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t - 0 \\
\widehat{w}_t &= \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Al reemplazar la solución de $\widehat{h}_t$ y de $\widehat{w}_t$ en la oferta del trabajo se encuentra la solución del consumo $\widehat{c}_t$:

$$\begin{aligned}
\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\
0 &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\
\widehat{c}_t &= \widehat{w}_t \\
\widehat{c}_t &= \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t
\end{aligned} \tag{3.106}$$

De la ecuación de equilibrio en el mercado de bienes se obtiene la solución para la inversión:

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \\
\widehat{i}_t &= \left(\widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t\right)\frac{y_{ss}}{i_{ss}} \\
\widehat{i}_t &= \left(\eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}(\eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t)\right)\frac{y_{ss}}{i_{ss}} \\
\widehat{i}_t &= (\eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t)(1 - \frac{c_{ss}}{y_{ss}})\frac{y_{ss}}{i_{ss}} \\
\widehat{i}_t &= (\eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t)\frac{i_{ss}}{y_{ss}}\frac{y_{ss}}{i_{ss}} \\
\widehat{i}_t &= \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \qquad (3.107)
\end{aligned}$$

Finalmente, de ley de movimiento del capital se obtiene la solución para el capital:

$$\begin{aligned}
\widehat{k}_{t+1} &= \widehat{i}_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \qquad (3.108)
\end{aligned}$$

Cuadro 3.7: Funciones de política y de estado (solución del modelo)

Funciones de política	Coeficientes (elasticidades)	Valores
[1] $\widehat{h}_t = 0$		
[2] $\widehat{y}_t = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t$	$\eta_{yk} = 1 - \alpha$	$\eta_{yk} = 0.333$
[3] $\widehat{r}_t = \eta_{rk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t$	$\eta_{rk} = \eta_{yk} - 1$	$\eta_{rk} = 0.667$
[4] $\widehat{w}_t = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t$		
[5] $\widehat{c}_t = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t$		
[6] $\widehat{i}_t = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t$		
[7] $\widehat{k}_{t+1} = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t$		

3.6.2. Método de Blanchard y Kahn

El método de Blanchard y Kahn resuelve un sistema de ecuaciones en diferencias estocástica por medio de la descomposición de Jordan; es decir, trata de partir el modelo o el sistema en dos componentes. La estrategía de solución consiste en resolver el componente inestable, de la cual se halla la función de política, y luego introducir esta función de política en la representación estado-espacio inicial para encontrar la ecuación de estado.

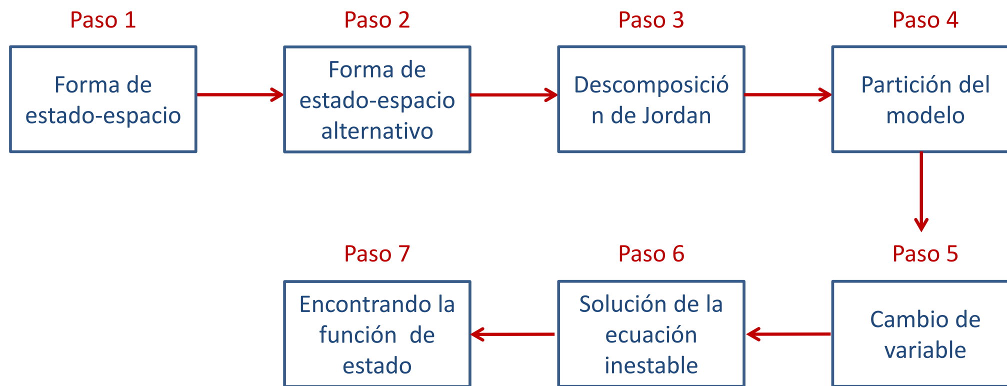
En este apartado se diferencia dos subsecciones: en la primera se explica el método en términos generales y en la segunda se aplica el método al modelo de Long y Plosser (1983).

Descripción del método: el métódo de Blanchard y Kahn se puede descomponer en siete pasos (ver la figura [3.3]). El primero consiste en transformar el sistema de ecuaciones en forma de estado-espacio. La utilidad de esta representación es que las ecuaciones se

pueden escribir como un sistema en diferencia de primer orden. El segundo paso consiste en obtener una forma de estado-espacio alternativo; es decir, transladar la matriz de coeficientes asociados al vector de la izquierda de la ecuación al lado derecho. El fin de ello es obtener un sistema de la forma siguiente: $Z_{t+1} = FZ_t + GU_{t+1}$.

El tercer paso consiste en descomponer el sistema de ecuaciones en dos partes. Para ello se utiliza la descomposición de Jordan, la cual particiona la matriz de coeficientes "F" en sus eigenvalores asociados. El cuarto paso es utilizar la partición de Jordan para separar el sistema de ecuaciones en un subsistema estable y en un subsistema inestable. La nomenclatura inestable se refiere a que son las ecuaciones asociadas a los iegenvalores inestables (módulo mayor a uno) de la matriz "F", y el subsistema estable se refiere a las ecuaciones asociadas a los iegenvalores estables (módulo menor a uno). El quinto paso es el cambio de variable con el fin de aprovechar al máximo la descomposición de Jordan, lo cual simplifica la solución del modelo. El sexto paso consiste en resolver la ecuación inestable por medio del método de *sustitución iterada*. El resultado de ello es la *función de política*. Finalmente, el septimo paso es utilizar la función de política en el modelo estado-espacio alternativo y de allí encontrar la *función de estado*.

Figura 3.2: Pasos del método de Blanchard y Kahn



Paso 1: Forma estado-espacio generalizado

El primer paso para resolver el sistema de ecuaciones no lineales que representan el modelo[3] es colocar dicho sistema en forma estado-espacio:

$$A \begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_t Y_{t+1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + CV_{t+1} \tag{3.109}$$

En la representación (3.109), la variable V_{t+1} puede ser choques iid con media igual a cero ($E(V_t) = 0$) y autocorrelación nula. Alternativamente, V_{t+1} puede comportarse como un proceso AR(1), la cual depende de choques exógenos iid.

[3]Cabe mencionar que a este sistema de ecuaciones no lineales se le conoce también como **modelo estructural**. Esto es debido a que muestra los parámetros profundos o iniciales del modelo. El modelo reducido es aquel que se obtiene de combinar las ecuciones de este sistema inicial; en este caso, los parámetros son combinaciones de los parámetros profundos.

En este sistema de ecuaciones se puede definir dos tipos de variables: X_t es el vector de variables *backward looking* (predeterminadas o variables de estado). Estas variables son funciones solo de las variables conocidas en "t", y dado que son pre-determinadas se cumple: $E_tX_{t+1} = X_{t+1}$. Un ejemplo de ello es el capital k_{t+1}, el cual ha sido determinado en "t"; es decir, ya se conoce en "t"; por tanto, $E_tk_{t+1} = k_{t+1}$.

Cabe mencionar que las variables de estado pueden ser endógenas y exógenas. Usualmente la variable de estado exógena es la productividad porque se comporta como un AR(1) y no depende de ninguna variable del modelo. Además de lo anterior, el segundo tipo de variables es el vector de variables *forward looking* (variables de control) Y_t.

Variables de estado	Variables de control	Variables de choques
$X_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ . \\ . \\ X_{nt} \end{bmatrix}_{nx1}$	$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ . \\ . \\ Y_{mt} \end{bmatrix}_{mx1}$	$V_t = \begin{bmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \\ . \\ . \\ V_{n_vt} \end{bmatrix}_{n_vx1}$

- El número de variables de estado "n" es igual al número de variables de estado endógenas "n_s" más el número de variables de estado exógenas "n_v".

$$n = n_s + n_v$$

- El número total de variables "$n + m$" es igual al número total de ecuaciones.

Con estas consideraciones, el sistema (3.72) quedaría caracterizado de la siguiente manera:

$$A_{(n+m)x(n+m)} \begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} = B_{(n+m)x(n+m)} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + C_{(n+m)xn_v}V_{t+1} \tag{3.110}$$

Paso 2: Forma estado-espacio alternativo

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + CV_{t+1} \\ \begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} &= \underbrace{A^{-1}B}_{F} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \underbrace{A^{-1}C}_{G} V_{t+1} \\ \begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} &= F \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + GV_{t+1} \end{aligned}$$

Paso 3: Descomposición de Jordan de F
La matriz F puede ser expresada (por la descomposición de Jordan) de la siguiente manera:

$$F = HJH^{-1} \tag{3.111}$$

$$F = [d_1...d_{n+m}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ 0 & ... & \lambda_{n+m} \end{bmatrix} [d_1...d_{n+m}]^{-1} \tag{3.112}$$

Donde H es la matriz de eigenvectores y J es la matrix diagonal de eigenvalores. Además, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n+m}$ son eigenvalores y $\{d_i\}_{i=1}^{n+m}$ son los eigenvectores asociados.

Introduciendo la descomposición de Jordan, ecuación (3.111), en la forma de estado-espacio alternativo, se tiene:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} &= F \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + GV_{t+1} \\
\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} &= HJH^{-1} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + GV_{t+1} \\
H^{-1}\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} &= JH^{-1} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + H^{-1}GV_{t+1}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Paso 4: Partición del modelo

Un paso importante en el método de Blanchard y Kahn es que los eigenvalores se ordenan de manera ascendente, esto es con el fin de identificar aquellos eigenvalores que en módulo son mayores a uno. Por tanto, los eigenvalores ordenados, en módulo, son:

$$| \lambda_1 | < | \lambda_2 | < | \lambda_3 | < ... | \lambda_{n+m} | < ...$$

Asumiento que la matriz de eigenvalores está ordenado, se tiene que "J" se puede expresar de la siguiente manera:

$$J = \begin{bmatrix} J_{1_{nxn}} & 0_{nxm} \\ 0_{mxn} & J_{2_{mxm}} \end{bmatrix}_{(n+m)x(n+m)} \tag{3.114}$$

La matriz "J" se ha particionado en cuatro elementos, de los cuales dos de ellos son importantes: el primero es $J_{1_{nxn}}$ que es una matriz diagonal que contiene los eigenvalores cuyos módulos son **menores** a uno ($| \lambda | < 1$). El segundo es $J_{2_{mxm}}$ que es una matriz diagonal que contiene los eigenvalores cuyos módulos son **mayores** a uno ($| \lambda | > 1$).

En base a la particion de la matriz de eigenvalores se particiona también la matriz de eigenvectores y su matriz inversa:

Matriz de eigenvectores	Inversa de la matriz de eigenvectores
$H = \begin{bmatrix} H_{11_{nxn}} & H_{12_{nxm}} \\ H_{21_{mxn}} & H_{22_{mxm}} \end{bmatrix}_{(n+m)x(n+m)}$	$H^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11_{nxn}} & \widetilde{H}_{12_{nxm}} \\ \widetilde{H}_{21_{mxn}} & \widetilde{H}_{22_{mxm}} \end{bmatrix}_{(n+m)x(n+m)}$

Considerando la partición de matrices en la ecuación (3.114):

$$\begin{aligned}
H^{-1}\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} &= JH^{-1} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + H^{-1}GV_{t+1} \\
\begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} &= J\begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} GV_{t+1}
\end{aligned}$$

Además, considerando que $G = \begin{bmatrix} G_{1_{nxn_v}} \\ G_{2_{mxn_v}} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_t Y_{t+1} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} V_{t+1} \tag{3.115}$$

Paso 5: Cambio de variable
En la ecuación (3.114) se puede definir dos nuevas variables $\widetilde{X}_t$ y $\widetilde{Y}_t$:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_t \\ \widetilde{Y}_t \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

Además, se considera:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{G}_1 \\ \widetilde{G}_2 \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

Introduciendo las dos nuevas variables en la ecuación (3.116) y el nuevo vector $\widetilde{G}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_t Y_{t+1} \end{bmatrix} &= J \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} V_{t+1} \\ \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{t+1} \\ E_t \widetilde{Y}_{t+1} \end{bmatrix} &= J \begin{bmatrix} \widetilde{X}_t \\ \widetilde{Y}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{G}_1 \\ \widetilde{G}_2 \end{bmatrix} V_{t+1} \\ \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{t+1} \\ E_t \widetilde{Y}_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{X}_t \\ \widetilde{Y}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{G}_1 \\ \widetilde{G}_2 \end{bmatrix} V_{t+1} \end{aligned} \tag{3.118}$$

Paso 6: Desacoplamiento de las ecuaciones
De la ecuación (3.118) se podría obtener dos ecuaciones; es decir, el sistema se puede desacoplar:

Ecuación estable

$$\widetilde{X}_{t+1} = J_1 \widetilde{X}_t + \widetilde{G}_1 V_{t+1} \tag{3.119}$$

Ecuación inestable

$$E_t \widetilde{Y}_{t+1} = J_2 \widetilde{Y}_t + \widetilde{G}_2 V_{t+1} \tag{3.120}$$

La ventaja de este desacoplamiento es que cada ecuación puede ser resuelta por separado.

Paso 7: Resolviendo la ecuación inestable (encontrando la función de política)
La ecuación (3.120) es una ecuación en diferencias estocástica con expectativas racionales de 1er orden. Para obtener la solución de este tipo de ecuaciones usualmente se aplica la técnica de *sustitución repetida*.

$$E_t \widetilde{Y}_{t+1} = J_2 \widetilde{Y}_t + \widetilde{G}_2 V_{t+1}$$

Reordenando los términos y considerando que J_2 es una matriz diagonal (mxm), cuyos elementos son mayores a uno, se tiene:

$$\begin{aligned} J_2\widetilde{Y}_t &= E_t\widetilde{Y}_{t+1} - \widetilde{G}_2V_{t+1} \\ \widetilde{Y}_t &= \underbrace{J_2^{-1}}_{=P_1}E_t\widetilde{Y}_{t+1} - \underbrace{J_2^{-1}\widetilde{G}_2}_{=P_2}V_{t+1} \\ \widetilde{Y}_t &= P_1E_t\widetilde{Y}_{t+1} - P_2V_{t+1} \qquad (3.121) \end{aligned}$$

Donde: P_1 es una matriz diagonal, cuyos elementos son mayore a uno. La solución de la ecuación (3.121) se obtiene al aplicar el método de sustitución repetida. Esta técnica trabaja de la siguiente manera: dado que esta ecuación se mantiene en todos los periodos bajo expectativas racionales, entonces la ecuación (3.121) se puede adelantar un periodo y aplicar el operador de expectativas en "t".

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_{t+1} &= P_1E_t\widetilde{Y}_{t+1} - P_2V_{t+1} \\ \widetilde{Y}_{t+1} &= P_1E_t\widetilde{Y}_{t+2} - P_2V_{t+2} \\ E_t\widetilde{Y}_{t+1} &= P_1E_t\widetilde{Y}_{t+2} - P_2E_tV_{t+2} \qquad (3.122) \end{aligned}$$

La ecuación (3.122) se reemplaza en (3.121) y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_t &= P_1E_t\widetilde{Y}_{t+1} - P_2V_{t+1} \\ \widetilde{Y}_t &= P_1\left[P_1E_t\widetilde{Y}_{t+2} - P_2E_tV_{t+2}\right] - P_2V_{t+1} \\ \widetilde{Y}_t &= P_1^2E_t\widetilde{Y}_{t+2} - P_1P_2E_tV_{t+2} - P_2V_{t+1} \qquad (3.123) \end{aligned}$$

Adelantando dos periodos en la ecuación (3.123) y aplicando expectativas en "t", se tiene:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_{t+2} &= P_1E_t\widetilde{Y}_{t+3} - P_2V_{t+3} \\ E_t\widetilde{Y}_{t+2} &= P_1E_t\widetilde{Y}_{t+3} - P_2E_tV_{t+3} \qquad (3.124) \end{aligned}$$

Nuevamente, reemplazando la ecuación (3.124) en (3.123), resulta:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_t &= P_1^2\left[P_1E_t\widetilde{Y}_{t+3} - P_2E_tV_{t+3}\right] - P_1P_2E_tV_{t+2} - P_2V_{t+1} \\ \widetilde{Y}_t &= P_1^3E_t\widetilde{Y}_{t+3} - P_1^2P_2E_tV_{t+3} - P_1P_2E_tV_{t+2} - P_2V_{t+1} \qquad (3.125) \end{aligned}$$

Al generalizar la ecuación (3.125) para "n" periodos, se tiene:

$$\widetilde{Y}_t = P_1^nE_t\widetilde{Y}_{t+n} - P_1^{n-1}P_2E_tV_{t+n} - P_1^{n-2}P_2E_tV_{t+(n-1)} - P_1^{n-3}P_2E_tV_{t+(n-2)} \ldots - P_1P_2E_tV_{t+2} - P_2V_{t+1} \qquad (3.126)$$

En forma compacta:

$$\widetilde{Y}_t = P_1^nE_t\widetilde{Y}_{t+n} - \sum_{j=2}^{n} P_1^{j-1}P_2E_tV_{t+j} - P_2V_{t+1} \qquad (3.127)$$

Considerando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}_t &= \lim_{n\to\infty}\left\{P_1^n E_t \widetilde{Y}_{t+n}\right\} - \lim_{n\to\infty}\sum_{j=2}^{n} P_1^{j-1}P_2E_tV_{t+j} - \lim_{n\to\infty}P_2V_{t+1}\\ \widetilde{Y}_t &= \lim_{n\to\infty}\left\{P_1^n E_t \widetilde{Y}_{t+n}\right\} - \sum_{j=2}^{\infty} P_1^{j-1}P_2E_tV_{t+j} - P_2V_{t+1} \qquad (3.128)\end{aligned}$$

El primer término de la ecuación (3.128), $\lim_{n\to\infty}\left\{P_1^n E_t \widetilde{Y}_{t+n}\right\}$, es igual a cero. Esto se debe a que la matriz diagonal P_1^n tiene valores menores a uno, los cuales tienden a cero a medida que "n" crece. Además, desde un punto de vista de optimización, que este término sea igual a cero refleja la condición de transversalidad que se le impone a la solución de esta ecuación en diferencias. Desde un punto de vista económico tiene sentido suponer que el valor esperado de la variable en un tiempo muy lejano no tenga influencia en la variable el día de hoy. A continuación se muestra la convergencia a cero de la matriz P_1^n cuando n tiende a infinito.

$$\begin{aligned}P_1^n &= (J_2^{-1})^n\\ &= \begin{bmatrix}1/\lambda_{i,1} & & & & \\ & 1/\lambda_{i,1} & & & \\ & & 1/\lambda_{i,1} & & \\ & & & ... & \\ & & & & 1/\lambda_{i,m}\end{bmatrix}^n\\ &= \begin{bmatrix}1/\lambda_{i,1} & & & & \\ & 1/\lambda_{i,1}^n & & & \\ & & 1/\lambda_{i,1}^n & & \\ & & & ... & \\ & & & & 1/\lambda_{i,m}^n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Aplicando límite con "n" que tiende a infinito:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P_1^n &= \begin{bmatrix}\lim_{n\to\infty}1/\lambda_{i,1} & & & & \\ & \lim_{n\to\infty}1/\lambda_{i,1}^n & & & \\ & & \lim_{n\to\infty}1/\lambda_{i,1}^n & & \\ & & & ... & \\ & & & & \lim_{n\to\infty}1/\lambda_{i,m}^n\end{bmatrix}\\ \lim_{n\to\infty}P_1^n &= [0]_{mxm}\\ \text{Por tanto} &: \lim_{n\to\infty}\left\{P_1^n E_t \widetilde{Y}_{t+n}\right\} = 0 \qquad (3.129)\end{aligned}$$

Considerando el resultado de la ecuación (3.129), la ecuación (3.128) quedaría:

$$\widetilde{Y}_t = -\sum_{j=2}^{\infty} P_1^{j-1}P_2E_tV_{t+j} - P_2V_{t+1} \qquad (3.130)$$

Además, se sabe que la variable V_t se distribuye como una normal con media cero y varianza constante; es decir, $V_t \sim N(0, \sigma_v^2)$. Esta distribución se mantiene para cada periodo; es decir, se cumple: $V_t \sim N(0, \sigma_v^2)$, $V_{t+1} \sim N(0, \sigma_v^2)$, ..., $V_{t+n} \sim N(0, \sigma_v^2)$. Donde la media condicional de la variable siempre es igual a cero: $E_t V_{t+n} = 0$ cuando $j = 1, 2, 3....$ Bajo esta premisa, entonces $E_t V_{t+j} = 0$, reemplazando esta expresión en la ecuación (3.92) se tiene:

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_t &= -\sum_{j=2}^{\infty} P_1^{j-1} P_2 \underbrace{E_t V_{t+j}}_{=0} - P_2 V_{t+1} \\
\widetilde{Y}_t &= -P_2 V_{t+1} \qquad (3.131)
\end{aligned}$$

Aplicando del operador expectativas en t a la ecuación (3.131) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_t &= -P_2 V_{t+1} \\
E_t \widetilde{Y}_t &= -P_2 E_t V_{t+1} \\
\text{Se sabe} &: E_t V_{t+1} = 0 \\
\text{Entonces} &: \\
E_t \widetilde{Y}_t &= 0 \\
\text{Por tanto} &: \\
\widetilde{Y}_t &= 0 \qquad (3.132)
\end{aligned}$$

De la ecuación (3.116) que refleja el cambio de variable:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_{21} X_t + \widetilde{H}_{22} Y_t &= \widetilde{Y}_t \\
\widetilde{H}_{21} X_t + \widetilde{H}_{22} Y_t &= 0 \\
\widetilde{H}_{22} Y_t &= -\widetilde{H}_{21} X_t \\
\text{Función de política} &= Y_t = -\widetilde{H}_{22}^{-1} \widetilde{H}_{21} X_t \qquad (3.133)
\end{aligned}$$

La ecuación (3.133) representa la función de política porque las variables de control (representada por el vector Y_t) están en función de las variables de estado (representada por el vector X_t).

Paso 8: En el sistema inicial (encontrando la función de estado)
Reescribiendo la representación de estado-espacio alternativo:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_t Y_{t+1} \end{bmatrix} &= F \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + G V_{t+1} \\
\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_t Y_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} V_{t+1}
\end{aligned}$$

La ecuación para la primera variable (la variable de estado) es:

$$X_{t+1} = F_{11} X_t + F_{12} Y_t + G_1 V_{t+1} \qquad (3.134)$$

Esta ecuación depende de la variable de control; sin embargo, por la función de política, ecuación (3.133), se sabe la relación entre Y_t y X_t. Reemplazando esta relación en la ecuación (3.134):

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= F_{11}X_t + F_{12}(-\widetilde{H}_{22}^{-1}\widetilde{H}_{21}X_t) + G_1V_{t+1} \\ \text{Ecuación de estado} &: X_{t+1} = (F_{11} - F_{12}\widetilde{H}_{22}^{-1}\widetilde{H}_{21})X_t + G_1V_{t+1} \end{aligned} \tag{3.135}$$

La ecuación (3.135) es la ecuación de estado. Con esta ecuación el modelo queda resuelto.

Aplicación del método: en la aplicación al modelo de Long y Plosser se seguirá los mismos pasos para mantener el hilo conductor del método de solución. Antes de aplicar el método es necesario reducir el número de ecuaciones y por ende el número de variables. El fin de ello es evitar que aparezca alguna fila llena de ceros en cualquier lado (matriz A o B) de la representación estado-espacio. Si, por ejemplo, aparece una fila de ceros en la matriz A, entonces dicha matriz no sería invertible. Esto imposibilitaría la aplicación del método de Blanchard y Kahn. Entonces partiendo del sistema de ecuaciones lineales (con variables en logarítmo) del cuadro [3.6], se realizan algunos artificios algebraicos descritos a continuación.

En primer lugar se elimina el salario real w_t al considerar el equilibrio en el mercado de trabajo; es decir, se iguala la oferta de trabajo (ecuación [3] del cuadro [3.6]) con la demanda de trabajo (ecuación [6] del cuadro [3.6]). La ecuación resultante se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Oferta de trabajo} &: \frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t = \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\ \text{Demanda de trabajo} &: \widehat{w}_t = \widehat{y}_t - \widehat{h}_t \\ \text{Equilibrio} &: \frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t + \widehat{c}_t = \widehat{w}_t = \widehat{y}_t - \widehat{h}_t \\ &: \frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t + \widehat{c}_t = \widehat{y}_t - \widehat{h}_t \\ &: \frac{1}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t = \widehat{y}_t - \widehat{c}_t \end{aligned} \tag{3.136}$$

La ecuación [5] del cuadro [3.6], que representa la demanda de capital, puede ser introducida en la ecuación [1] (ecuación de Euler) por medio de la tasa de interés.

$$\begin{aligned} \text{Demanda de capital} &: \widehat{r}_t = \widehat{y}_t - \widehat{k}_t \\ \text{Ecuación de Euler} &: \widehat{c}_t = E_t\left[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{r}_{t+1}\right] \\ \widehat{r}_{t+1} \text{ en la ecuación de Euler} &: \widehat{c}_t = E_t\left[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}\right] \end{aligned} \tag{3.137}$$

Finalmante, la ecuación [2] se introduce en la restricción presupuestaria (ecuación [7]):

$$\begin{aligned} \text{Ley de movimiento del capital} &: \widehat{k}_{t+1} = \widehat{i}_t \\ \text{Restricción presupuestaria} &: \widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \\ &: \widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{k}_{t+1} \end{aligned} \quad (3.138)$$

Hasta aquí se tiene un conjunto de cinco ecuaciones con cinco variables debido a que se ha eliminado tres variables ($\widehat{r}_t$, $\widehat{i}_t$ y $\widehat{w}_t$). Sin embargo, el sistema aún se podría resumir un poco más. Despejando el trabajo $\widehat{h}_t$ de la ecuación (3.100) e introduciendo esta expresión en la función de producción (ecuación [4] del cuadro [3.6]), se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Equilibrio (mercado de trabajo)} &: \widehat{h}_t = (1-h_{ss})(\widehat{y}_t - \widehat{c}_t) \\ \text{Función de producción} &: \widehat{y}_t = \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + \alpha\widehat{h}_t \\ &: \widehat{y}_t = \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t + \alpha(1-h_{ss})(\widehat{y}_t - \widehat{c}_t) \\ &: (1-\alpha(1-h_{ss}))\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t - \alpha(1-h_{ss})\widehat{c}_t \end{aligned} \quad (3.139)$$

Con esta última ecuación y habiendo eliminado el trabajo $\widehat{h}_t$ y su correspondiente ecuación, el sistema se convierte en cuatro ecuaciones con cuatro variables: $\widehat{c}_t$, $\widehat{y}_t$, $\widehat{k}_t$ y $\widehat{a}_t$.

$$\text{E1} : \widehat{c}_t = E_t\left[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}\right] \quad (3.140)$$

$$\text{E2} : \widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{k}_{t+1} \quad (3.141)$$

$$\text{E3} : (1-\alpha(1-h_{ss}))\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t - \alpha(1-h_{ss})\widehat{c}_t \quad (3.142)$$

$$\text{E4} : \widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \quad (3.143)$$

A este nivel se puede intentar escribir el sistema de cuatro ecuaciones en forma de estado-espacio. Para ello se define la variables de control ($\widehat{c}_t$ y $\widehat{y}_t$) y las variables de estado ($\widehat{k}_t$ y $\widehat{a}_t$). Las primeras dos variables tienen asociado el operador de expecttivas, por lo cual son considerados variables *forward looking* o de control. Cabe mencionar que aunque el capital en "t+1" tenga asociado el operador expectativas; no obstante, sigue siendo una variable de estado porque $\widehat{k}_{t+1}$ es determinada en "t", entonces $E_t\widehat{k}_{t+1}$ es igual a $\widehat{k}_{t+1}$ (sin expectativas).

La siguiente ecuación expresa la forma genérica de escribir el sistema en forma estado-espacio:

$$A\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_tY_{t+1} \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + CV_{t+1}$$

Donde en este caso en particular $X_t = [\widehat{k}_t \quad \widehat{a}_t]^t$ y $Y_t = [\widehat{y}_t \quad \widehat{c}_t]^t$. Bajo esta premisa se escribe el sistema en forma estado-espacio:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -i_{ss}/y_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ \widehat{a}_{t+1} \\ E_t\widehat{c}_{t+1} \\ E_t\widehat{y}_{t+1} \end{bmatrix} = \ldots \quad (3.144)$$

La representación estado-espacio se detuvo debido a que la matriz "A" presenta una línea llena de ceros. Esto imposibilita encontrar la inversa de esta matriz y por tanto encontrar solución al sistema. Todo ello sugiere que el modelo puede ser aún más resumido.

Se despeja la producción $\widehat{y}_t$ de la ecuación (??) y se introduce en la ecuación (??) y (??). Con ello se elimina una variable ($\widehat{y}_t$) y una ecuación (??).

$$\text{De E3} \quad : \quad \widehat{y}_t = \frac{1}{1-\alpha(1-h_{ss})}(\widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t - \alpha(1-h_{ss})\widehat{c}_t) \tag{3.145}$$

$$\text{(3.145) en E2} \quad : \quad \frac{1}{1-\alpha(1-h_{ss})}(\widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t - \alpha(1-h_{ss})\widehat{c}_t) = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{k}_{t+1}$$

$$: \quad n_c\widehat{c}_t + n_k\widehat{k}_{t+1} = \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t \tag{3.146}$$

Donde: $n_c = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}(1-\alpha(1-h_{ss})) + \alpha(1-h_{ss})$ y $n_k = \frac{i_{ss}}{y_{ss}}(1-\alpha(1-h_{ss}))$. Reemplazando la ecuación (3.147) en E1 se tiene:

$$\text{E1} \quad : \quad \widehat{c}_t = E_t\big[\widehat{c}_{t+1} - \widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}\big] \tag{3.147}$$

$$\text{(3.146) en E1} \quad : \quad \widehat{c}_t = E_t\Big[\widehat{c}_{t+1} + [\widehat{a}_{t+1} + (1-\alpha)\widehat{k}_{t+1} - \alpha(1-h_{ss})\widehat{c}_{t+1}]\underbrace{\frac{1}{1-\alpha(1-h_{ss})}}_{n_y} + \widehat{k}_{t+1}\Big]$$

$$: \quad \widehat{c}_t = E_t\big[(1+\alpha(1-h_{ss})n_y)\widehat{c}_{t+1} - n_y\widehat{a}_{t+1} + (1-(1-\alpha)n_y)\widehat{k}_{t+1} \tag{3.148}$$

Finalmente el sistema está compuesto por tres ecuaciones con tres variables: $\widehat{c}_t$, $\widehat{k}_t$ y $\widehat{a}_t$:

$$\text{E1*} \quad : \quad \widehat{c}_t = E_t\big[(1+\alpha(1-h_{ss})n_y)\widehat{c}_{t+1} - n_y\widehat{a}_{t+1} + (1-(1-\alpha)n_y)\widehat{k}_{t+1}\big] \tag{3.149}$$

$$\text{E2*} \quad : \quad n_c\widehat{c}_t + n_k\widehat{k}_{t+1} = \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t \tag{3.150}$$

$$\text{E3*} \quad : \quad \widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \tag{3.151}$$

Considerando que la única variables *forward looking* es el consumo y que existe dos variables de estado: capital y la productividad, se procede a escribir este sistema en forma estado-espacio:

$$\begin{bmatrix} -(1-(1-\alpha)n_y) & n_y & -(1+\alpha(1-h_{ss})n_y) \\ n_k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ \widehat{a}_{t+1} \\ E_t\widehat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ (1-\alpha) & 1 & -n_c \\ 0 & \phi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widehat{k}_t \\ \widehat{a}_t \\ E_t\widehat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\epsilon_{t+1} \tag{3.152}$$

En este caso cada matriz (A y B) no tienen filas llenas de ceros, entonces se podría encontrar la inversa de A. A continuación se sigue los pasos descritos anteriormente en la metodología de Blanchard y Kahn pero esta vez aplicado al modelo de Long y Plosser (1983).

Paso 1: Forma estado espacio
En términos generales la forma estado espacio para este modelo sería:

$$A \begin{bmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ \widehat{a}_{t+1} \\ E_t\widehat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \widehat{k}_t \\ \widehat{a}_t \\ \widehat{c}_t \end{bmatrix} + C\epsilon_{t+1} \tag{3.153}$$

Sin embargo, para este modelo la matriz A, B y C tienen sus propios valores en función de los parámetros.

$$\begin{bmatrix} -(1-(1-\alpha)n_y) & n_y & -(1+\alpha(1-h_{ss})n_y) \\ n_k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ \widehat{a}_{t+1} \\ E_t\widehat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ (1-\alpha) & 1 & -n_c \\ 0 & \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_t \\ \widehat{a}_t \\ E_t\widehat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} \tag{3.154}$$

Al reemplazar los valores de los parámetros, la ecuación (3.154) quedaría:

$$\begin{bmatrix} -0.2860 & 2.14416 - 2.1441 & \\ 0.1528 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ \widehat{a}_{t+1} \\ E_t\widehat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0.333 & 1 & -0.8472 \\ 0 & 0.979 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_t \\ \widehat{a}_t \\ \widehat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} \tag{3.155}$$

Paso 2: Forma estado-espacio alternativo
Se multiplica la ecuación (3.155) por la inversa de la matriz A con el fin de obtener la forma estado espacio alternativo:

$$\begin{bmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ \widehat{a}_{t+1} \\ E_t\widehat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1789 & 6.5434 & -5.5434 \\ 0 & 0.9790 & 0 \\ -0.2907 & 0.1061 & 1.2059 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_t \\ \widehat{a}_t \\ \widehat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} \tag{3.156}$$

Donde la matriz que acompaña al vector $[\widehat{k}_t, \widehat{a}_t, \widehat{c}_t]^t$ es la matriz "F" y el vector $[0{,}1{,}1]^t$ es el vector "G". Cabe mencionar que la inversa de la matriz A está representada por la siguiente matriz:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 6.5434 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \\ -0.4664 & -0.8729 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Descomposición de Jordan de F
Al aplicar la descomposición de Jordan de la matriz F se obtiene lo siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.979 & 0 \\ 0 & 0 & 3.0518 \end{bmatrix} \tag{3.157}$$

En la matriz J se puede observar que tiene dos eigenvalores con módulo menor a uno y un eigenvalor con módulo mayor a uno. La condición de Blanchard y Kahn para que el sistema tenga solución única indica que el número de eigenvalores con módulo mayor a uno debe ser igual al número de variables *forward looking*. Dado que el consumo es la única variable *forward looking*, entonces la condición de Blanchard y Kahn se cumple para este modelo.

Paso 4: Partición del modelo
Particionando la matriz de eigenvalores se tiene J_1 que contiene aquellos eigenvalores estables.

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 \\ 0 & 0.979 \end{bmatrix} \tag{3.158}$$

De otro lado, J_2 contiene el único eigenvalor inestable:

$$J_2 = 3.0518 \tag{3.159}$$

Además, considerando la matriz inversa de H y sus matrices particionadas:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3384 & -3.7805 & 2.1490 \\ 0 & 2.3860 & 0 \\ 0.6873 & 2.0640 & -2.0640 \end{bmatrix} \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11_{nxn}} & \widetilde{H}_{12_{nxm}} \\ \widetilde{H}_{21_{mxn}} & \widetilde{H}_{22_{mxm}} \end{bmatrix}$$

Donde, cada matriz particionada es:

$$\widetilde{H}_{11} = \begin{bmatrix} 0.3384 & -3.7805 \\ 0 & 2.3860 \end{bmatrix} \quad \widetilde{H}_{12} = \begin{bmatrix} 2.1490 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \widetilde{H}_{21} = \begin{bmatrix} 0.6873 & 2.0640 \end{bmatrix} \quad \widetilde{H}_{22} = \begin{bmatrix} -2.0640 \end{bmatrix}$$

Paso 5: Cambio de variable

En línea con la ecuación (3.116) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_t \\ \widetilde{Y}_t \end{bmatrix}$$

Aplicando a los parámetros del modelo:

$$\begin{bmatrix} 0.3384 & -3.7805 & 2.1490 \\ 0 & 2.3860 & 0 \\ 0.6873 & 2.0640 & -2.0640 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_t \\ \widehat{a}_t \\ \widehat{c}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{k}}_t \\ \widetilde{\widehat{a}}_t \\ \widetilde{\widehat{c}}_t \end{bmatrix} \tag{3.160}$$

De igual manera con la ecuación (3.117):

$$\begin{bmatrix} \widetilde{H}_{11} & \widetilde{H}_{12} \\ \widetilde{H}_{21} & \widetilde{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{G}_1 \\ \widetilde{G}_2 \end{bmatrix}$$

La aplicamos a los parámetros del modelo:

$$\begin{bmatrix} 0.3384 & -3.7805 & 2.1490 \\ 0 & 2.3860 & 0 \\ 0.6873 & 2.0640 & -2.0640 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{G}_1 \\ \widetilde{G}_2 \end{bmatrix} \tag{3.161}$$

Por tanto el sistema con el cambio de variable quedaría:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{k}}_{t+1} \\ \widetilde{\widehat{a}}_{t+1} \\ E_t\widetilde{\widehat{c}}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{k}}_t \\ \widetilde{\widehat{a}}_t \\ \widetilde{\widehat{c}}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{G}_1 \\ \widetilde{G}_2 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{k}}_{t+1} \\ \widetilde{\widehat{a}}_{t+1} \\ E_t\widetilde{\widehat{c}}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3330 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9790 & 0 \\ 0 & 0 & 3.0518 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{k}}_t \\ \widetilde{\widehat{a}}_t \\ \widetilde{\widehat{c}}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.6316 \\ 2.3860 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} \tag{3.162}$$

Paso 6: Desacoplamiento de las ecuaciones
De la ecuación (3.118) se podría obtener dos subsistemas; es decir, el sistema se puede desacoplar:

$$\begin{aligned}
& \text{Ecuación estable} \\
\widetilde{X}_{t+1} &= J_1\widetilde{X}_t + \widetilde{G}_1 V_{t+1} \\
\begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{k}}_{t+1} \\ \widetilde{\widehat{a}}_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.3330 & 0 \\ 0 & 0.9790 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{k}}_t \\ \widetilde{\widehat{a}}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.6316 \\ 2.3860 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} \qquad (3.163) \\
& \text{Ecuación inestable} \\
E_t\widetilde{Y}_{t+1} &= J_2\widetilde{Y}_t + \widetilde{G}_2 V_{t+1} \\
E_t\widetilde{\widehat{c}}_{t+1} &= 3.0518\widetilde{\widehat{c}}_t + 0\epsilon_{t+1} \qquad (3.164)
\end{aligned}$$

Paso 7: Resolviendo la ecuación inestable (encontrando la función de política)
Resolviendo la ecuación (3.164) se tiene que:

$$\widetilde{\widehat{c}}_t = 0 \qquad (3.165)$$

Además, se sabe del cambio de variable (ecuación (3.160)) que:

$$\widetilde{\widehat{c}}_t = 0.6873\widehat{k}_t + 2.064\widehat{a}_t - 2.064\widehat{c}_t \qquad (3.166)$$

Por tanto, combinando la ecuación (3.165) y (3.166):

$$\begin{aligned}
\widehat{c}_t &= \frac{0.6873}{2.064}\widehat{k}_t + \frac{2.064}{2.064}\widehat{a}_t \\
\widehat{c}_t &= 0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \qquad (3.167)
\end{aligned}$$

La ecuación (3.167) representa la función de política para el consumo.

Paso 8: En el sistema inicial (encontrando la función de estado)
La siguiente ecuación es la representación de estado-espacio alternativo (ecuación (3.156)) que se mencionó líneas arriba.

$$\begin{bmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ \widehat{a}_{t+1} \\ E_t\widehat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1789 & 6.5434 & -5.5434 \\ 0 & 0.9790 & 0 \\ -0.2907 & 0.1061 & 1.2059 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_t \\ \widehat{a}_t \\ \widehat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1}$$

De esta ecuación se puede obtener la ecuación para las variables de estado. Por ejemplo para el $\widehat{k}_{t+1}$ se tiene:

$$\widehat{k}_t = 2.1789\widehat{k}_t + 6.5434\widehat{a}_t - 5.5434\widehat{c}_t \qquad (3.168)$$

Reemplazando la ecuación de política (ecuación (3.167)) se tiene:

$$\begin{aligned}
\widehat{k}_{t+1} &= 2.1789\widehat{k}_t + 6.5434\widehat{a}_t - 5.5434(0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t) \\
\widehat{k}_{t+1} &= 0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \qquad (3.169)
\end{aligned}$$

Esta ecuación representa la ecuación de estado. Lo mismo se hace con la segunda variable, la cual muestra la evolución de la productividad:

$$\widehat{a}_{t+1} = 0.9790\widehat{a}_t + \epsilon_{t+1} \tag{3.170}$$

Con la función de política para el consumo y la función de estado se podría obtener las reglas de decisión de las demás variables. Del cuadro [3.6], la cual contiene las ecuaciones log-lineales, se puede extraer la ecuación [2]:

$$\begin{aligned} \widehat{i}_t &= \widehat{k}_{t+1} \\ \widehat{i}_t &= 0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \end{aligned} \tag{3.171}$$

La ecuación (3.171) representa la función de política (solución) para la inversión $\widehat{i}_t$. De la ecuación [7] del mismo cuadro se puede obtener la solución para la producción (ecuación (3.172)):

$$\begin{aligned} \widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \\ \widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}(0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t) + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}(0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t) \\ \widehat{y}_t &= (\underbrace{\frac{c_{ss}}{y_{ss}} + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}}_{=1})(0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t) \\ \widehat{y}_t &= 0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \end{aligned} \tag{3.172}$$

De la misma manera para la tasa de interés (ecuación [5] del cuadro [3.6]):

$$\begin{aligned} \widehat{r}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{k}_t \\ \widehat{r}_t &= (0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t) - \widehat{k}_t \\ \widehat{r}_t &= -0.667\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \end{aligned} \tag{3.173}$$

Para el trabajo $\widehat{h}_t$ se utiliza la ecuación [4] para obtener su solución:

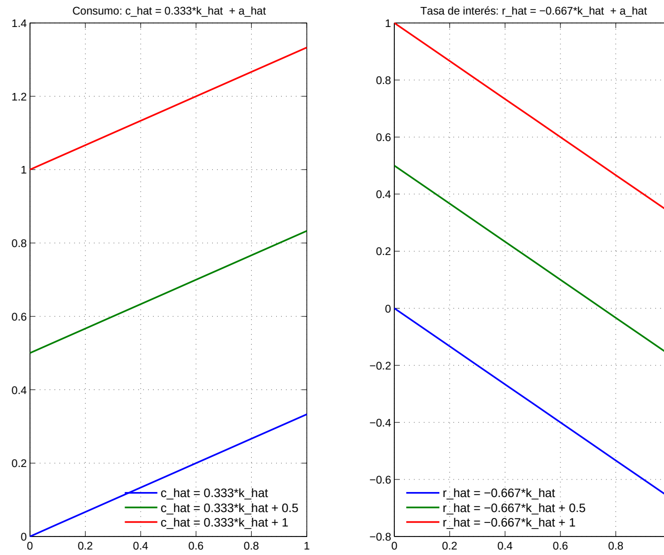
$$\begin{aligned} \widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + (\underbrace{1-\alpha}_{=0.333})\widehat{k}_t + \alpha\widehat{h}_t \\ 0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t &= \widehat{a}_t + 0.333\widehat{k}_t + \alpha\widehat{h}_t \\ 0 &= \alpha\widehat{h}_t \\ \widehat{h}_t &= 0 \end{aligned} \tag{3.174}$$

Finalmente, de la ecuación [3] se obtiene la solución para el salario real $\widehat{w}_t$:

$$\begin{aligned} \frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\ 0 &= \widehat{w}_t - (0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t) \\ \widehat{w}_t &= 0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \end{aligned} \tag{3.175}$$

Las ecuaciones (3.167) y (3.169) a (3.175) representan la solución del sistema de ecuaciones log-lineales, las cuales son similares a las obtenidas analíticamente (cuadro 3.7). En la figura [3.3] se grafica la función de política del consumo y de la tasa de interés. La relación entre estas variables y el capital es lineal debido a que se ha restringido la apróximación de la solución a la expansión de Taylor de primer orden.

Figura 3.3: Función de política



3.7. Representación de serie de tiempo

Las funciones de política y de estado son útiles para encontrar la representación de serie de tiempo de cada variable. En primer lugar se debe de expresar la productividad en su forma MA(∞), luego se debe de encontrar la representación de series de tiempo de la variable de estado k_t en su forma MA(∞). La representación MA(∞) permite obtener ambas variables en función al error ϵ_t. Finalmente, debido a que las demás variables están en función a la productividad y al capital, entonces se puede obtener la representación de serie de tiempo de cada una de ellas con tan solo sustituir la forma MA(∞) de la productividad y del capital en cada función de política. A continuación se muestra el procedimiento descrito.

$$\begin{aligned} \widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \\ (1-\phi L)\widehat{a}_t &= \epsilon_t \\ \widehat{a}_t &= \frac{\epsilon_t}{1-\phi L} \end{aligned} \tag{3.176}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el capital y considerando la representación (3.176):

$$
\begin{aligned}
\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \\
(1-\eta_{yk}L)\widehat{k}_{t+1} &= \widehat{a}_t \\
(1-\eta_{yk}L)\widehat{k}_{t+1} &= \frac{\epsilon_t}{1-\phi L} \\
\widehat{k}_{t+1} &= \frac{\epsilon_t}{(1-\eta_{yk}L)(1-\phi L)} \qquad (3.177)
\end{aligned}
$$

La ecuación (3.177) indica que el capital se comporta como un AR(2):

$$
\begin{aligned}
(1-(\eta_{yk}+\phi)L+\eta_{yk}\phi L^2)\widehat{k}_{t+1} &= \epsilon_t \\
\widehat{k}_{t+1}-(\eta_{yk}+\phi)\widehat{k}_t+\eta_{yk}\phi\widehat{k}_{t-1} &= \epsilon_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{yk}+\phi)\widehat{k}_t-\eta_{yk}\phi\widehat{k}_{t-1}+\epsilon_t \qquad (3.178)
\end{aligned}
$$

Del cuadro [3.7] se observa que el producto, el consumo, la inversión y el salario tienen la misma función de politica, la cual es la misma que la del capital:

$$
\widehat{y}_t = \widehat{c}_t = \widehat{i}_t = \widehat{w}_t = \widehat{k}_{t+1} = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t
$$

Por tanto, estas variables tambien se comportan como un AR(2), la misma representación de serie de tiempo del capital e inclusive los mismos coeficientes asociados a cada componente de la serie de tiempo. De otro lado, la función de política de la tasa de interés es distinta a las demas variables en su coeficiente asociado al capital:

$$
\begin{aligned}
\widehat{r}_t &= \eta_{rk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \\
\text{Donde} &: \eta_{rk} = \eta_{yk} - 1 \\
\widehat{r}_t &= (\eta_{yk}-1)\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \\
\widehat{r}_t &= \underbrace{\eta_{yk}\widehat{k}_t + \widehat{a}_t}_{=\widehat{k}_{t+1}} - \widehat{k}_t \\
\widehat{r}_t &= \widehat{k}_{t+1} - \widehat{k}_t \\
\widehat{r}_t &= \frac{\epsilon_t}{(1-\eta_{yk}L)(1-\phi L)} - \frac{\epsilon_{t-1}}{(1-\eta_{yk}L)(1-\phi L)} \\
\widehat{r}_t &= \frac{\epsilon_t-\epsilon_{t-1}}{(1-\eta_{yk}L)(1-\phi L)} \\
\widehat{r}_t &= \frac{(1-L)\epsilon_t}{(1-\eta_{yk}L)(1-\phi L)} \qquad (3.179)
\end{aligned}
$$

La ecuación (3.179) sugiere que la tasa de interés se comporta como un ARMA(2,1), tal como se puede ver en la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
\widehat{r}_t &= \frac{(1-L)\epsilon_t}{(1-\eta_{yk}L)(1-\phi L)} \\
(1-(\eta_{yk}+\phi)L+\eta_{yk}\phi L^2)\widehat{r}_t &= \epsilon_t - \epsilon_{t-1} \\
\widehat{k}_{t+1}-(\eta_{yk}+\phi)\widehat{r}_{t-1}+\eta_{yk}\phi\widehat{r}_{t-2} &= \epsilon_t - \epsilon_{t-1} \\
\widehat{r}_t &= (\eta_{yk}+\phi)\widehat{r}_{t-1}-\eta_{yk}\phi\widehat{r}_{t-2}+\epsilon_t-\epsilon_{t-1} \qquad (3.180)
\end{aligned}
$$

Cabe mencionar que al igual que las demás variables endógenas, la tasa de interés mantiene los coeficientes del componente autorregresivo de orden 2 que presenta el capital. En el cuadro [3.8] se muestra un resumen de la representación de serie de tiempo de las variables del modelo.

Cuadro 3.8: Representación de series de tiempo

Variable	Serie de tiempo
$\widehat{y}_t$	AR(2)
$\widehat{c}_t$	AR(2)
$\widehat{i}_t$	AR(2)
$\widehat{k}_t$	AR(2)
$\widehat{h}_t$	AR(2)
$\widehat{w}_t$	AR(2)
$\widehat{r}_t$	AR(2)
$\widehat{a}_t$	AR(1)

Hasta aquí se ha encontrado la solución del modelo, las cuales son reglas de decisión que describen el consumo, trabajo e inversión óptima del agente representativo. Estas reglas dependen del stock de capital (predeterminado) y de la productividad. Para evidenciar el efecto del choque de productividad en estas decisiones se podría sustituir la productividad por su representación MA(∞). De la ecuación (3.176) se podría obtener la versión en medias moviles de la productividad;

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_t &= \frac{\epsilon_t}{1-\phi L} \\
\widehat{a}_t &= \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \phi^3\epsilon_{t-3} + ...
\end{aligned}$$

Introduciendo esta expresión en la solución, por ejemplo, del producto (ecuación (3.172)):

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= 0.333\widehat{k}_t + \widehat{a}_t \\
\widehat{y}_t &= 0.333\widehat{k}_t + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \phi^3\epsilon_{t-3} + ... \\
\text{En forma compacta} &: \\
\widehat{y}_t &= 0.333\widehat{k}_t + \sum_{j=0}^{\infty}\phi^j\epsilon_{t-j}
\end{aligned}$$

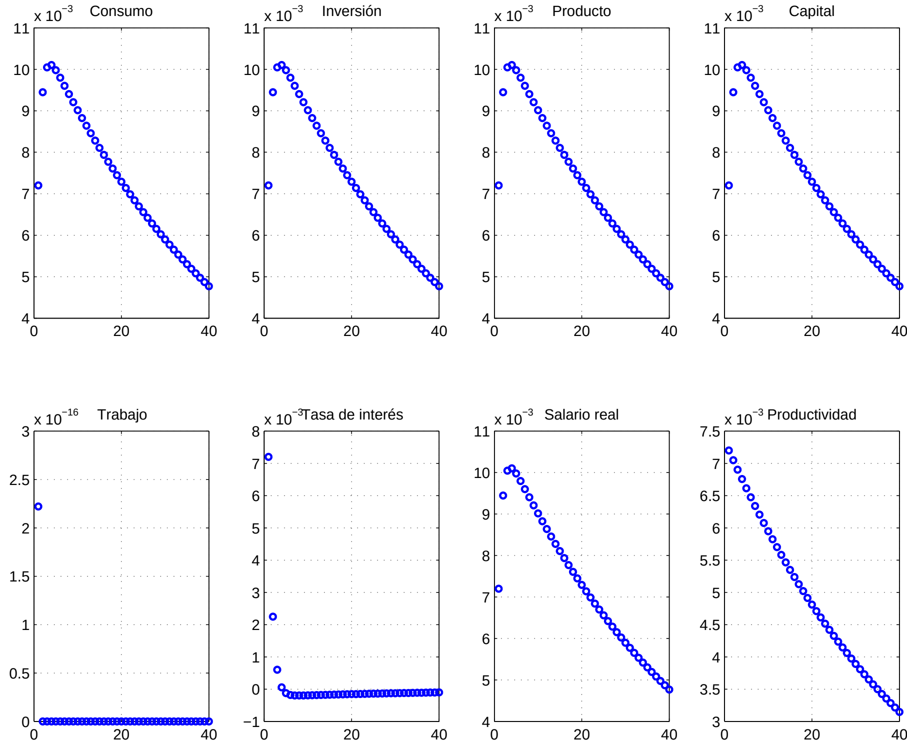
Esta última ecuación sugiere que el producto de hoy depende del stock de capital acumulado hasta hoy (que fue determinado en el periodo previo) y de la acumulación de choques de productividad (positivos o negativos).

3.8. Funciones impulso-respuesta

La función impulso-respuesta representa el comportamiento temporal de cada variable endógena ante la realización de un choque. Es importante notar que cada elemento de

esta función es un equilibrio. Por ejemplo, cada valor de la función impulso-respuesta del consumo refleja el equilibrio en el mercado de bienes en cada periodo. De igual forma la función impulso-respuesta del salario refleja el equilibrio en cada periodo del mercado de trabajo.

Figura 3.4: Función impulso-respuesta



Nota: Esta gráfica impulso-respuesta se obtiene del archivo “irfs_nolineal_log.m”

El gráfico [3.4] ilustra las reacciones de las variables ante un choque positivo de productividad en el perido “t=1”. Para entender por qué cada variable se comporta de la manera en como se muestra en el gráfico [3.4] se analizará el comportamiento de las variables (del modelo en general) desde “t=0” hasta “t=4”.

Periodo $t = 0$: en este periodo la economía está en estado estacionario; es decir, está en el equilibrio de largo plazo. En este equilibrio todas las variables son iguales a su valor de estado estacionario:

$$\widehat{r}_0 = \widehat{y}_0 = \widehat{c}_0 = \widehat{w}_0 = \widehat{h}_0 = \widehat{i}_0 = \widehat{k}_0 = \widehat{a}_0 = 0$$

Además, el capital en el periodo “t=1” es igual a la inversión en “t=0”:

$$\widehat{k}_1 = \widehat{i}_0 = 0$$

De lo anterior se concluye que el capital en el periodo “t=0” y “t=1” son igual a cero (están en su estado estacionario):

$$\widehat{k}_1 = \widehat{k}_0 = 0$$

Periodo $t = 1$: en este periodo sucede el choque, el cual toma el valor de su desviación estándar $\sigma_\epsilon = 0.0072$:

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_1 &= \phi \underbrace{\widehat{a}_0}_{=0} + \underbrace{\epsilon_1}_{=\sigma_\epsilon} \\
\widehat{a}_1 &= \sigma_\epsilon \qquad (3.181)
\end{aligned}$$

Reacciones de la empresa: el incremento de la productividad influencia positivamente el producto, la cual a su vez incrementa la demanda de factores.

$$\uparrow \widehat{a}_1 \rightarrow \uparrow \widehat{y}_1 \rightarrow \uparrow Pmg\widehat{k}_1(D_{k_1}) \wedge \uparrow Pmg\widehat{h}_1(D_{h_1})$$

En primer lugar, el efecto directo del incremento de la productividad es sobre la función de producción:

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_1 &= \underbrace{\widehat{a}_1}_{=\sigma_\epsilon} + (1-\alpha)\underbrace{\widehat{k}_1}_{=0} + \alpha\widehat{h}_1 \\
\widehat{y}_1 &= \sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_1 \qquad (3.182)
\end{aligned}$$

La ecuación (3.182) sugiere que la producción en "t=1" es mayor que en "t=0" aunque el trabajo sea igual a cero. En segundo lugar, este incremento en la producción genera un aumento en la productividad marginal del capital y del trabajo; es decir, incentiva una mayor demanda de dichos factores por el lado de la empresa.

$$\begin{aligned}
\text{Demanda de trabajo} &: \ \widehat{w}_1 = \widehat{y}_1 - \widehat{h}_1 \\
&: \ \widehat{w}_1 = \sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_1 - \widehat{h}_1 \qquad (3.183)
\end{aligned}$$

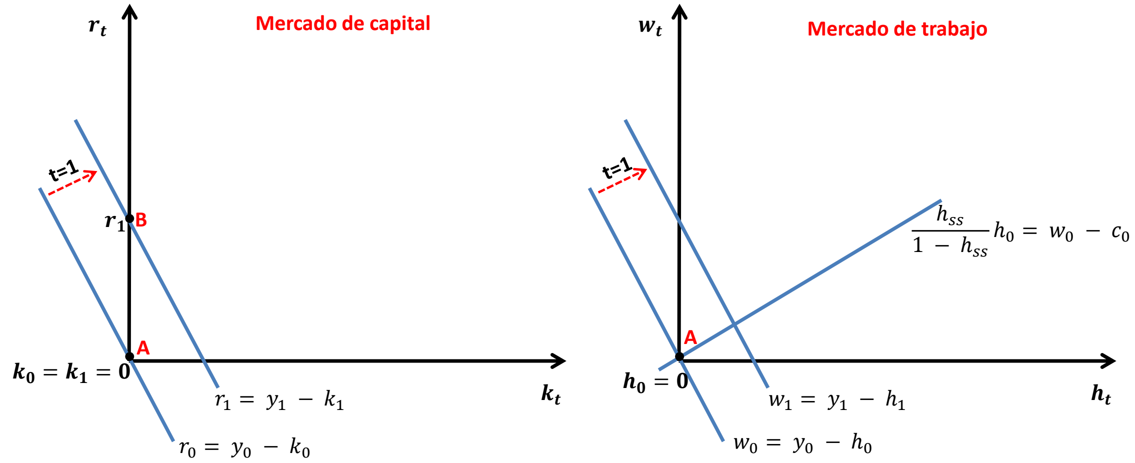
Por tanto, dado que $\widehat{y}_1 > \widehat{y}_0$, entonces la demanda de trabajo se incrementa (ver gráfico 3.5). En tercer lugar, la demanda del capital se expande:

$$\begin{aligned}
\text{Demanda de capital} &: \ \widehat{r}_1 = \widehat{y}_1 - \underbrace{\widehat{k}_1}_{=0} \\
&: \ \widehat{r}_1 = \widehat{y}_1 = \sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_1 \qquad (3.184)
\end{aligned}$$

Reacciones de la familia: la familia representativa se ve afectada indirectamente por el choque de productividad por medio del mercado de factores. Ante este cambio de condiciones, la familia responde ajustando su curva de oferta de trabajo y de capital.

En primer lugar, dado que la oferta de capital en "t=1" ha sido determinado en "t=0", la cual es igual a cero; es decir, el capital se mantiene en el estado estacionario, entonces el equilibrio en el mercado de capital en "t=1" está determinado en el punto "B" del gráfico

Figura 3.5: Respuesta de la empresa ante el choque de productividad ($t = 1$)



[3.5]. El incremento de la tasa de interés ($\widehat{r}_1 > \widehat{r}_0$) produce dos efectos sobre el consumo. El primero es conocido como efecto sustitución, el cual indica que un incremento en la tasa de interés esperado en el periodo siguiente reduce el consumo en el periodo actual e incrementa el consumo en el periodo siguiente. Esto se debe a que el consumidor tiene una disposición a sustituir consumo intertemporalmente si el incentivo (la tasa de interés) es cada vez más fuerte. Cabe mencionar que por "incremento" se entiende que la variable está por encima de su estado estacionario; es decir, $\widehat{r}_t > 0$. Cuando ello sucede, el efecto sustitución sugiere que el consumo $\widehat{c}_{t-1}$ se reduce. De otro lado si $\widehat{r}_t < 0$ el consumo $\widehat{c}_{t-1}$ se incrementa.

El análisis del efecto sustitución se realiza mediante la ecuación de Euler. Al analizar dicha ecuación en $t = 0$ se tiene:

$$\widehat{c}_0 = E_t[\widehat{c}_1 - \widehat{r}_1]$$

En este caso, un incremento de $\widehat{r}_1$ produciría una caída de $\widehat{c}_0$ y un incremento de $\widehat{c}_1$; sin embargo, dado que en $t = 0$ la economía está en estado estacionario, el único efecto que se mantiene es el incremento del consumo en "$t = 1$". Es decir, $\widehat{c}_1 = \widehat{r}_1$ (**Efecto 0**).

Dado que la familia está parada en "t=1" es necesario analizar el efecto sustitución en este periodo:

$$\widehat{c}_1 = E_t[\widehat{c}_2 - \widehat{r}_2]$$

Esta ecuación sugiere que si la tasa de interés del periodo siguiente se incrementa; es decir, $\widehat{r}_2 > 0$ entonces el consumo de hoy $\widehat{c}_1$ disminuye. Como se verá más adelante, efectivamente en "t=2" se tiene que $\widehat{r}_2 > 0$ y por tanto el efecto sustitución indica que $\widehat{c}_1$ disminuye (**efecto 1**).

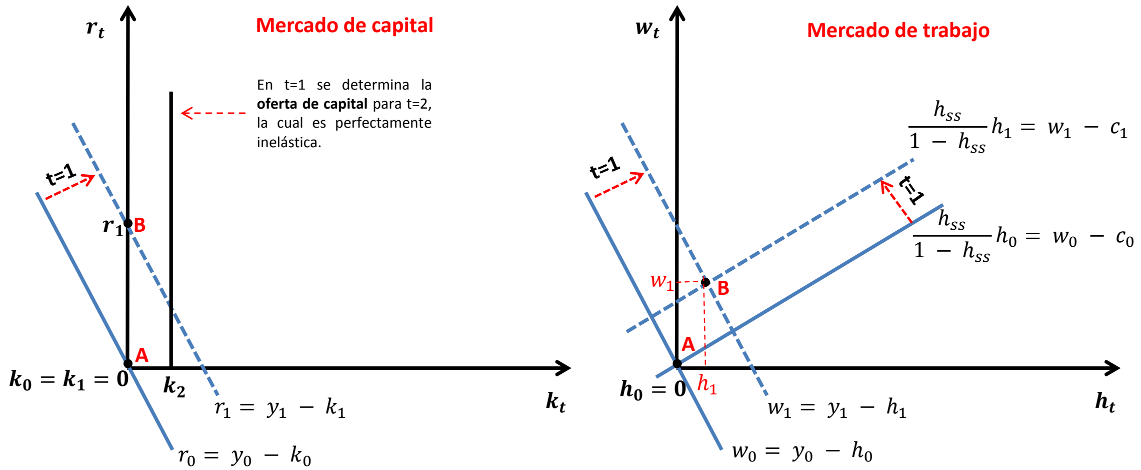
El segundo efecto de la tasa de interés es conocido como "efecto riqueza" o "efecto ingreso", el cual indica que el consumidor se siente más rico debido a que el costo de

alquiler del capital (tasa de interés) se ha incrementado y por tanto sus ingresos también. Para analizar este efecto es necesario recurrir a la restricción presupuestaria (en niveles) en "t=1".

$$c_1 + i_1 = w_1 h_1 + r_1 k_1$$

Dado el aumento de la tasa de interés en "t=1", la familia podría destinar estos recursos a un mayor consumo $\widehat{c}_1$ e inversión $\widehat{i}_1$ (**efecto 2**). Hasta aquí estos dos efectos son contrapuestos, la pregunta natural es qué efecto es dominante. En este modelo ambos efectos se neutralizan debido a que la elasticidad de sustitución intertemporal es igual a uno. Tal como se demostrará en el capítulo 4, la dominancia del efecto sustitución sobre el efecto ingreso depende de la elasticidad de sustitución. Por tanto, no hay un movimiento en el consumo por esta vía, solo por el efecto sustitución en "t=0" que produce un incremento del consumo en "t=1" (**Efecto 0**).

Figura 3.6: Respuesta de la familia ante el choque de productividad ($t = 1$)



En la figura [3.6] se muestra la reacción de la familia por medio de la oferta de trabajo, llevando el equilibrio en "t=1" al punto "B". La pregunta que surge es ¿hasta qué punto la familia reduce su oferta de trabajo? suponemos que h_1 es el equilibrio final. Si esto es así se debe de cumplir que el salario w_1 debe equilibrar la oferta y demanda de trabajo:

$$\underbrace{\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_1 + \widehat{c}_1}_{\text{oferta de trabajo}} = \widehat{w}_1 = \underbrace{\widehat{y}_1 - \widehat{h}_1}_{\text{demanda de trabajo}} \tag{3.185}$$

Operando en ambos lados de la expresión (3.185) se tiene:

$$\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_1 = \widehat{y}_1 - \widehat{c}_1 \tag{3.186}$$

Pero se sabe que:

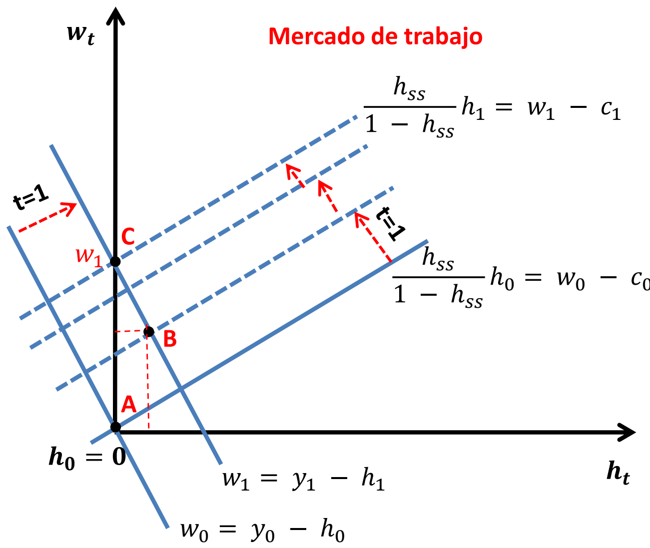
$$\widehat{c}_1 = \widehat{r}_1 = \widehat{y}_1 = \sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_1$$

Entonces reemplazando esta expresión en la ecuación (3.186):

$$\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_1 = 0 \tag{3.187}$$

Por tanto, el trabajo de equilibrio en "t=1" es igual a cero; es decir, es igual al valor de su estado estacionario: $\widehat{h}_1 = 0$. Por tanto lo que realmente pasa con la oferta de trabajo es que se reduce sucesivamente hasta llegar al punto "C" (ver la figura [3.7]).

Figura 3.7: Equilibrio en el mercado de trabajo ($t = 1$)



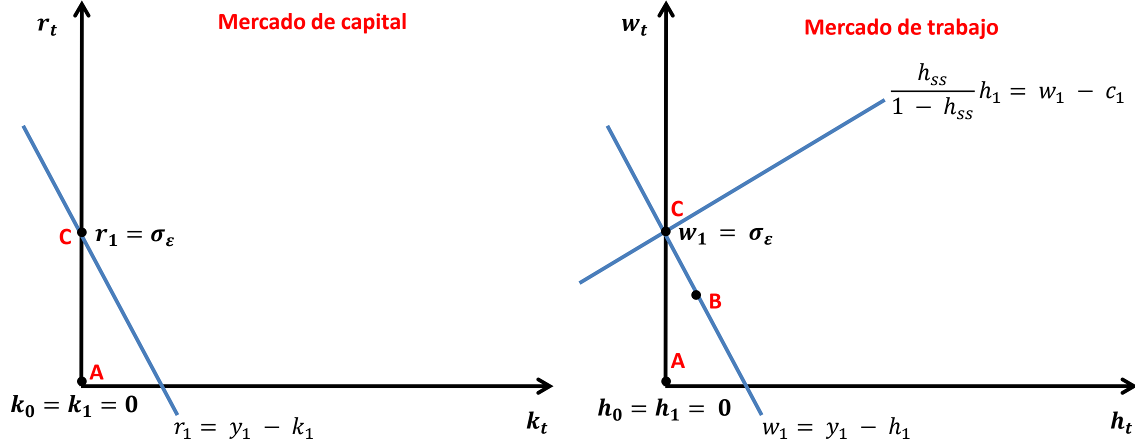
Por tanto, para resumir los valores de equilibrio de las variables se tiene lo siguiente: $\widehat{a}_1 = \sigma_\epsilon$, luego: $\widehat{h}_1 = 0$ y $\widehat{y}_1 = \widehat{w}_1 = \widehat{c}_1 = \widehat{r}_1 = \sigma_\epsilon$

Además, $\widehat{k}_1 = 0$ y $\widehat{i}_1 = \widehat{k}_2$. Para hallar el valor de $\widehat{k}_2$ se utiliza la ecuación de equilibrio de mercado de bienes:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\widehat{y}_1}_{=\widehat{c}_1} &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_1 + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_1 \\
(1-\frac{c_{ss}}{y_{ss}})\widehat{c}_1 &= \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_1 \\
\frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_1 &= \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_1 \\
\widehat{c}_1 &= \widehat{i}_1
\end{aligned} \tag{3.188}$$

Dado que $\widehat{c}_1 = \sigma_\epsilon$, entonces: $\widehat{i}_1 = \sigma_\epsilon$ y por tanto: $\widehat{k}_2 = \sigma_\epsilon$. El gráfico [3.8] indica el equilibrio final en el periodo "t=1" en el mercado de factores.

Figura 3.8: Equilibrio en $t = 1$



Periodo $t = 2$: en este periodo aún el efecto de la productividad se vislumbra aunque con menor fuerza. La ecuación (3.189) indica que la productividad en este periodo $\widehat{a}_2$ es menor que en el periodo anterior $\widehat{a}_1$:

$$\begin{aligned}\widehat{a}_2 &= \phi \underbrace{\widehat{a}_1}_{=\sigma_\epsilon} + \underbrace{\epsilon_2}_{=0} \\ \widehat{a}_2 &= \phi\sigma_\epsilon \end{aligned} \tag{3.189}$$

Cabe mencionar que el choque que se considera en este modelo es temporal; es decir, su realización es en un solo periodo y es igual a su desviación estándar: $\epsilon_1 = \sigma_\epsilon$. En los siguientes periodos el choque es igual a su estado estacionario; es decir: $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = ... = 0$. Ademas, al obtener la representación MA(∞) de la productividad se puede analizar los efectos del choque de productividad sobre la productividad en los siguientes periodos:

$$\widehat{a}_t = \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \phi^3\epsilon_{t-3} + \phi^4\epsilon_{t-4} + ... \tag{3.190}$$

Al calcular la variación de la productividad en "t" ante un choque en el mismo periodo se tiene:

$$\frac{\Delta\widehat{a}_t}{\Delta\epsilon_t} = 1$$

Considerando que $\Delta\epsilon_t = \sigma_\epsilon$, entonces: $\Delta\widehat{a}_t = \sigma_\epsilon$ y además si se sabe que la variación de la productividad es con respecto a su estado estacionario (= 0) entonces: $\widehat{a}_t = \sigma_\epsilon$. De la misma forma se calcula el impacto del choque en "t+1", "t+2" y así sucesivamente, se tiene lo siguiente:

$$\widehat{a}_{t+1} = \phi\sigma_\epsilon, \quad \widehat{a}_{t+2} = \phi^2\sigma_\epsilon, \quad \widehat{a}_{t+3} = \phi^3\sigma_\epsilon...$$

Este resultado es importante y sugiere dos ideas centrales: la primera es que dado que $\phi < 1$ entonces el impacto del choque se diluye o disminuye en el tiempo. La segunda idea es que la maginitud del impacto depende del valor del parámetro de persistencia ϕ. Si este

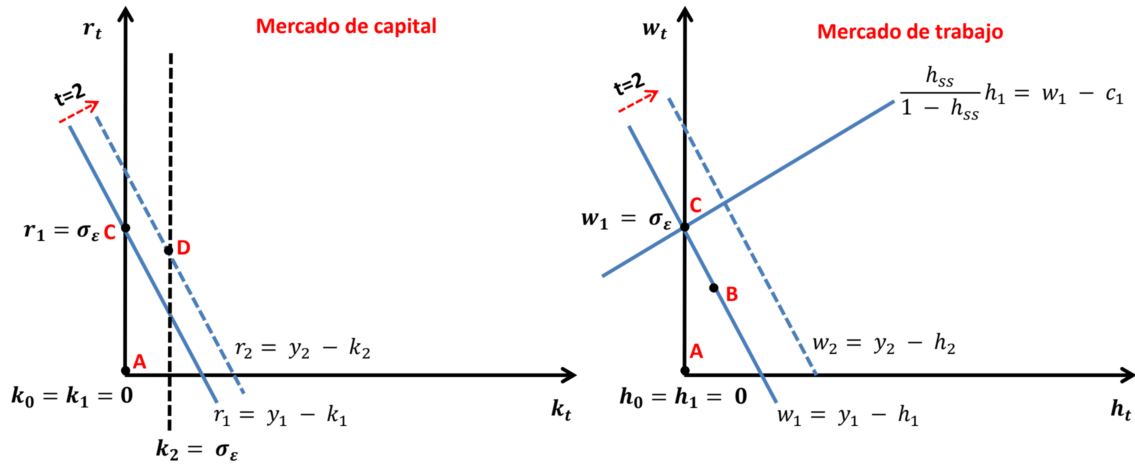
parámetro es pequeño entonces rápidamente el efecto desaparecerá en el tiempo.

Reacciones de la empresa: como se mencionó antes, el primer impacto del choque de productividad es sobre la función de producción.

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_2 &= \widehat{a}_2 + (1-\alpha)\widehat{k}_2 + \alpha\widehat{h}_2 \\
\widehat{y}_2 &= \phi\sigma_\epsilon + (1-\alpha)\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_2 \\
\widehat{y}_2 &= (\phi + (1-\alpha))\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_2, \qquad \phi = 0.979, \quad \alpha = 0.667 \\
\widehat{y}_2 &= 1.312\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_2 \qquad (3.191)
\end{aligned}$$

De los resultados de equilibrio en el periodo “t=1” se sabe que $\widehat{y}_1 = \sigma_\epsilon$. Entonces dado $\widehat{h}_2$, en la ecuación (3.191) se observa que el coeficiente (1.312) que multiplica a σ_ϵ en $\widehat{y}_2$ es mayor al asociado a $\widehat{y}_1$ (1). Esto sugiere que: $\widehat{y}_2 > \widehat{y}_1 > 0$. El incremento del producto a causa de la mayor productividad incentiva a la empresa a expandir su demanda de trabajo y de capital como se ve en la figura [3.9].

Figura 3.9: Respuesta de la empresa ante el choque de productividad (t=2)



Al reemplazar el valor del producto en la demanda de capital se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\widehat{r}_2 &= \widehat{y}_2 - \widehat{k}_2 \\
\widehat{r}_2 &= (\phi + (1-\alpha))\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_2 - (\sigma_\epsilon) \\
\widehat{r}_2 &= \underbrace{(\phi - \alpha)}_{0.312}\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_2 \qquad (3.192)
\end{aligned}$$

Se sabe que la tasa de interés de equilibrio en el periodo “t=1” es $\widehat{r}_1 = \sigma_\epsilon$. Entonces al comparar este resultado con la ecuación (3.192) se deduce que $\widehat{r}_2 < \widehat{r}_1$. Esto indica que la demanda del capital en el periodo “t=2” no se ha expandido lo suficiente como para incrementar la tasa de interés por encima de $\widehat{r}_1$. Cabe mencionar que aunque la tasa de interés es menor que el periodo anterior sigue siendo mayor al estado estacionario y por

tanto sigue produciendo un incentivo de sustituir consumo de hoy por mañana (efecto sustitución negativo en el consumo de hoy) y sigue generando ingresos positivos a la familia (efecto ingreso positivo) aunque en **menor medida** que en el periodo "t=1".

Reacciones de la familia: el efecto ingreso se puede observar en la restricción presupuestaria (en niveles):

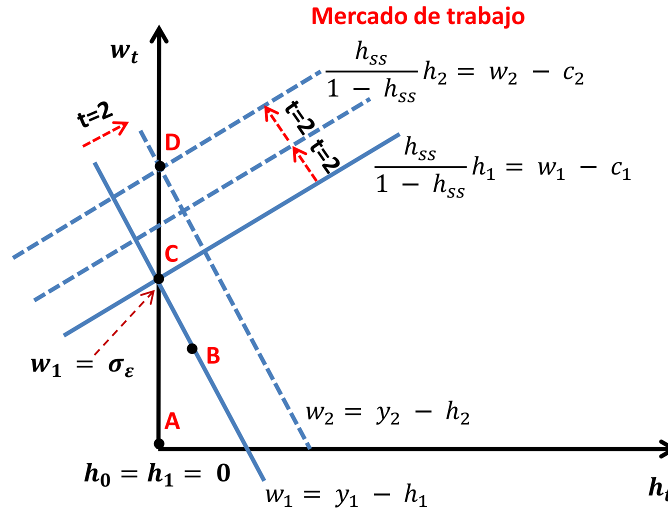
$$c_2 + i_2 = w_2 h_2 + r_2 k_2$$

Donde el lado del ingreso se incrementa debido al aumento de la tasa de interés con respecto a su estado estacionario. Cabe mencionar que este incremento es menor con respecto al periodo previo. Esto produce que el consumo y la inversión en "t=2" aumente pero en menor proporción (con respecto al periodo previo). De otro lado, el efecto sustitución sugiere que el consumo en "t=2" también debería de aumentar y el consumo del periodo "t=1" debería de disminuir:

$$\widehat{c}_1 = E_t[\widehat{c}_2 - \widehat{r}_2] \tag{3.193}$$

Por tanto, ante el incremento del consumo por efectos de la tasa de interés, la familia se siente con recursos suficientes como para sacrificar ocio. Esto lleva a la reducción de la oferta de trabajo en el periodo "t=2" hasta el nivel en el que el trabajo se queda en su valor de estado estacionario (ver la figura 3.10).

Figura 3.10: Respuesta de la familia ante el choque de productividad (t=2)



Luego que la empresa y la familia han reaccionado ante los efectos de choque de productividad, el cual se materializó en el periodo 1, se tiene los siguiente valores de equilibrio de las variables en el periodo 2: $\widehat{a}_2 = \phi\sigma_\epsilon$, luego: $\widehat{h}_2 = 0$ y $\widehat{y}_2 = \widehat{w}_2 = \widehat{c}_2 = (\phi + 1 - \alpha)\sigma_\epsilon$. Además, se tiene que $\widehat{r}_2 = (\phi - \alpha)\sigma_\epsilon$. De la misma manera que en el periodo 1, se puede concluir que bajo la restricción presupuestaria la inversión en equilibrio es igual al consumo de equilibrio:

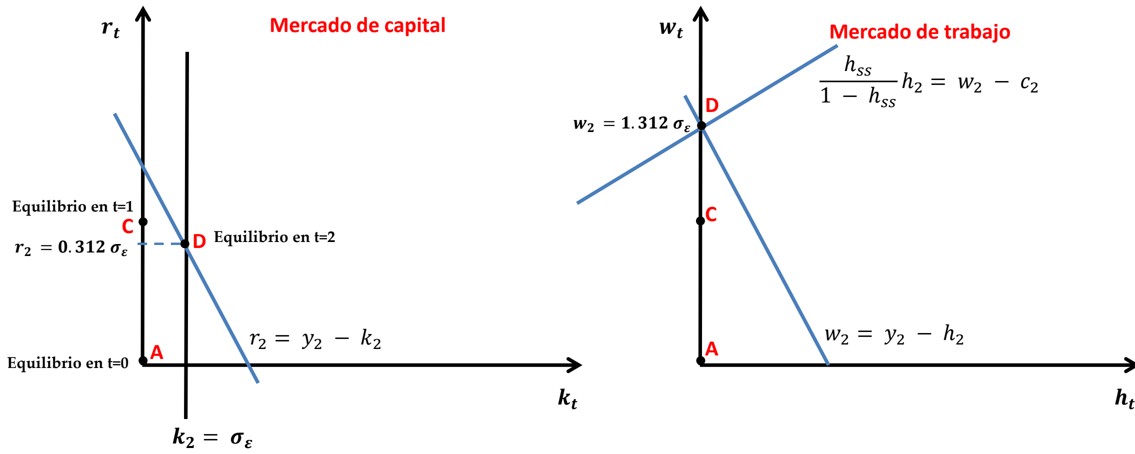
$$\widehat{c}_2 = \widehat{i}_2$$

Asimismo, por la ley de movimiento del capital se sabe que: $\widehat{k}_3 = \widehat{i}_2$. Por tanto, los valores de equilibrio de todas las variables son:

$$\widehat{y}_2 = \widehat{w}_2 = \widehat{c}_2 = \widehat{i}_2 = \widehat{k}_3 = (\phi + 1 - \alpha)\sigma_\epsilon, \quad \widehat{a}_2 = \phi\sigma_\epsilon, \quad \widehat{h}_2 = 0$$

La figura 3.11 muestra el equilibrio en el mercado de factores en el segundo periodo.

Figura 3.11: Equilibrio en $t = 2$



Periodo $t = 3$**:** en este periodo los efectos del choque de productividad aún persisten aunque con menor impacto.

$$\widehat{a}_3 = \phi \underbrace{\widehat{a}_2}_{=\phi\sigma_\epsilon} + \underbrace{\epsilon_3}_{=0}$$

$$\widehat{a}_3 = \phi^2\sigma_\epsilon \tag{3.194}$$

De la ecuación (3.194) se puede inferir que $\widehat{a}_3 = \phi^2\sigma_\epsilon$ es menor que $\widehat{a}_2 = \phi\sigma_\epsilon$. Por tanto el impacto sobre el producto será positivo pero menor que en el periodo "t=2".

Reacciones de la empresa: dado que el stock de capital se ha estado incrementando entre el periodo 2 y 3 (pasó de $\widehat{k}_2 = \sigma_\epsilon$ a $\widehat{k}_3 = 1.312\sigma_\epsilon$) y que además los efectos del choque que se materializó en el primer periodo aún persisten, en menor fuerza, en el tercer periodo. Todo ello lleva al producto a incrementarse en este periodo tal como se muestra a continuación.

$$\widehat{y}_3 = \widehat{a}_3 + (1-\alpha)\widehat{k}_3 + \alpha\widehat{h}_3$$

$$\widehat{y}_3 = \phi^2\sigma_\epsilon + (1-\alpha)(1+\phi-\alpha)\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_3$$

$$\widehat{y}_3 = \underbrace{(\phi^2 + (1-\alpha)(1+\phi-\alpha))}_{=1.3953}\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_3$$

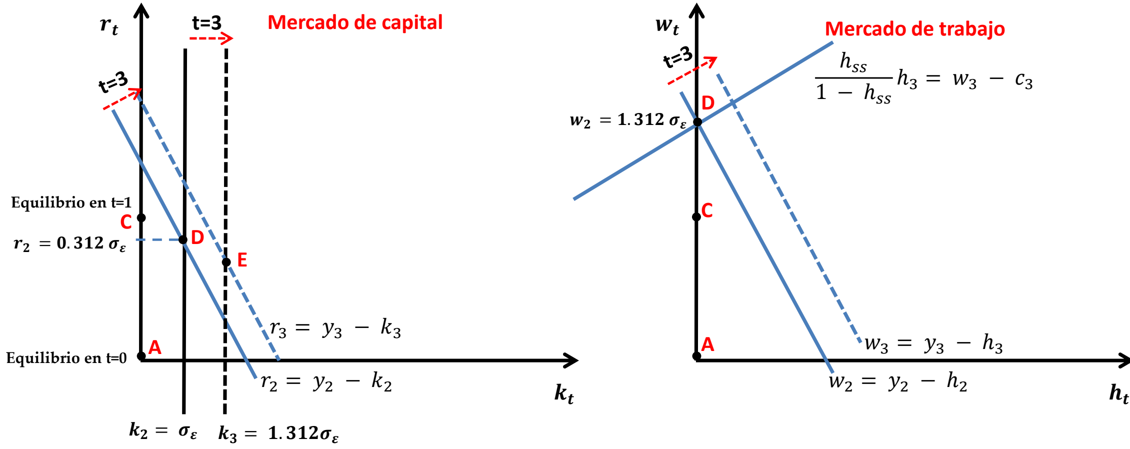
$$\widehat{y}_3 = 1.3953\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_3 \tag{3.195}$$

Al comparar con el producto del periodo “t=2”, se tiene lo siguiente:

$$1.3953\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_3 = \widehat{y}_3 > \widehat{y}_2 = 1.312\sigma_\epsilon$$

Ante el incremento del producto, la empresa expande su demanda de capital y de trabajo como en los peridos previos, tal como se observa en la figura 3.12.

Figura 3.12: Respuesta de la empresa ante el choque de productividad (t=3)



Al reemplazar el valor del producto en la demanda de capital se obtiene lo siguiente:

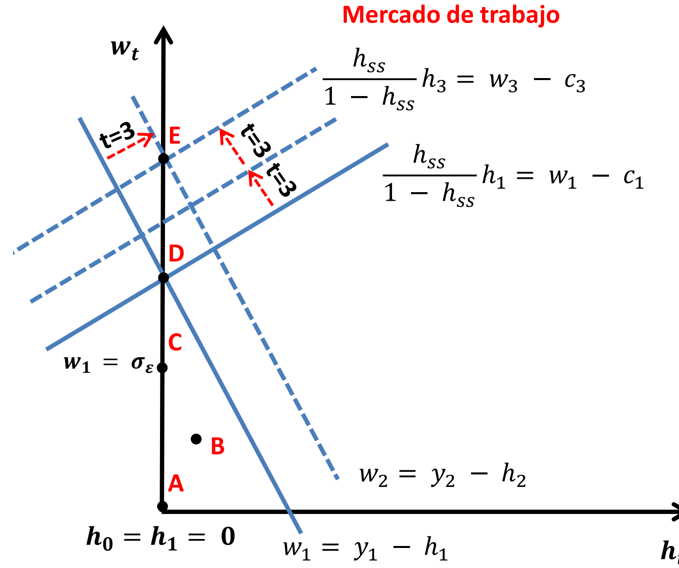
$$\begin{aligned}
\widehat{r}_3 &= \widehat{y}_3 - \widehat{k}_3 \\
\widehat{r}_3 &= 1.3953\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_3 - 1.312\sigma_\epsilon \\
\widehat{r}_3 &= 0.0833\sigma_\epsilon + \alpha\widehat{h}_3 \qquad (3.196)
\end{aligned}$$

Al comparar el valor de equilibrio de la tasa de interés en el periodo “t=1”, ecuación (3.192), con la ecuación (3.196) se observa que la tasa de interés en el periodo 3 se ha reducido significativamente: el coeficiente de σ_ϵ en la ecuación de demanda de la tasa de interés pasó de 31.2 % en el segundo periodo a 8.33 % en el tercer periodo (ecuación 3.196). Esto se debe a dos efectos: por un lado la influencia del choque de productividad se diluye en el tiempo y la expansión del stock de capital es menor; es decir, se incrementa pero a un menor ritmo.

Reacciones de la familia: ante un escenario de mayor demanda de trabajo y de capital por el lado de las empresas pero en menor magnitud que en el periodo anterior, los ingresos de la familia aún se mantienen positivas; es decir, por encima del estado estacionario debido a que la tasa de interés (aunque pequeña) aún sigue siendo positiva. Asimismo, el salario real se mantiene al alza. Todo ello implica que la familia experimenta un efecto ingreso aunque menor que el periodo anterior pero que permite incrementar el consumo, el ocio y la inversión. El incremento del ocio se traduce en una reducción de la oferta de trabajo hasta llegar al equilibrio en “E” (ver la figura 3.13).

De otro lado, el efecto sustitución implica una reducción del consumo en el segundo periodo pero un incremento en periodo actual. Cabe mencionar que dado que la tasa de interés en el este periodo ya está muy cerca a cero, el efecto sustitución es pequeño.

Figura 3.13: Respuesta de la familia ante el choque de productividad (t=3)



Los valores de equilibrio de todas las variables son:

$$\widehat{y}_3 = \widehat{w}_3 = \widehat{c}_3 = \widehat{i}_3 = \widehat{k}_4 = (\phi^2 + (1-\alpha)(1+\phi-\alpha))\sigma_\epsilon, \quad \widehat{a}_3 = \phi^2\sigma_\epsilon, \quad \widehat{h}_3 = 0$$

En los siguientes periodos, el efecto del choque de productividad prácticamente desaparecerá, lo cual llevará a que la demanda del capital se incremente marginalmente ante una expansión de la oferta de capital. Ello producirá que la tasa de interés se vuelva negativa; es decir, este por debajo de su estado estacionario. Ante esta situación, por el efecto sustitución, la familia aumentará su consumo hoy evitando transladar consumo presente al futuro. El incremento del consumo presente implica una menor inversión hoy lo que finalmente se traduce en la reducción del stock del capital en los periodos siguientes. Esta reducción de la oferta de capital por el lado de las familias se mantendrá hasta que el capital vuelva al estado estacionario. Este comportamiento llevará a que todas las variables de la economía vuelvan al estado estacionario en un periodo de tiempo.

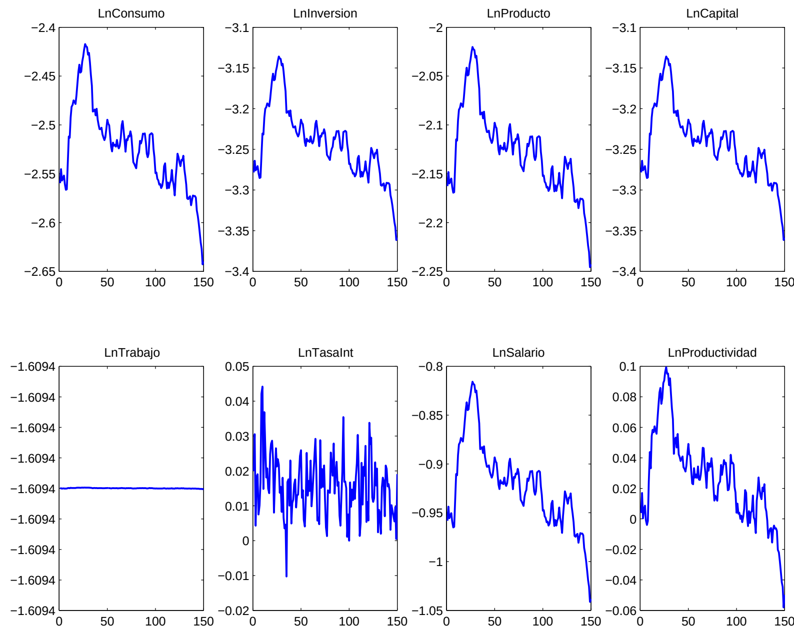
3.9. Simulación de las variables endógenas

Tal como se indico en el capítulo 2, la simulación de las variables endógenas se puede realizar de dos formas: la primera es indicandole a Dynare dentro de "stoch_simul" el número de periodos que se desea simular, la desventaja de este camino es que solo se puede hacer una simulación. La segunda es utilizar dos opciones de Dynare (periodos y número

de réplica), la primera opción indica el número de periodos y la segunda el número de veces que se desea realizar la simulación. La desventaja de este método es que Dynare crea un archivo binario, el cual es difícil de leer en Matlab. Sin embargo, Johannes Pfeifer ha creado una función en Matlab que soluciona este problema (para mayor detalle ver el capítulo 2).

El gráfico [3.14] muestra la simulación mediante la primera opción. Cabe mencionar que para esta simulación se utiliza el código "Long_Plosser.m" (sección 5). Asimismo, el gráfico [3.15] muestra la décima simulación de las variables por medio de la segunda opción.

Figura 3.14: Simulación (primera alternativa)



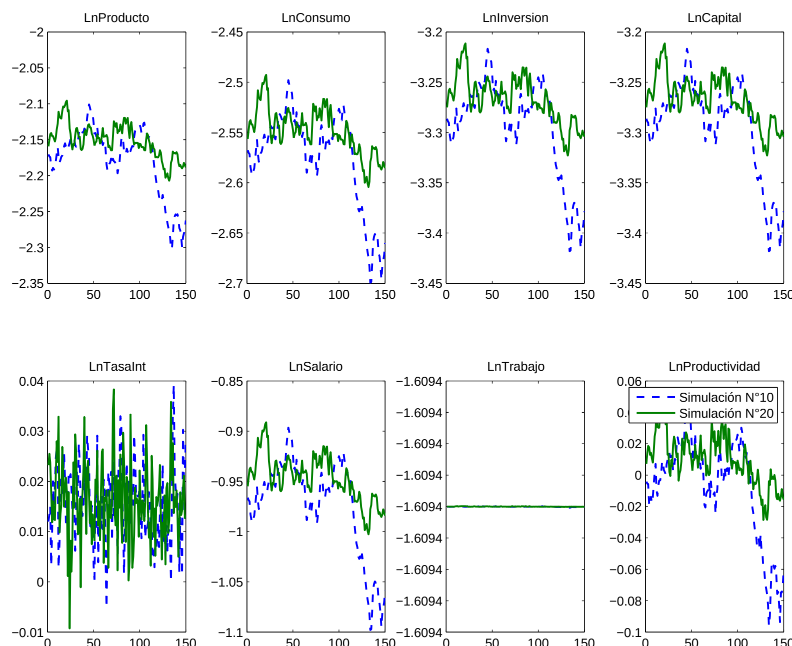
Como se puede ver en ambas alternativas de simulación, las variables endógenas (en logaritmo) se comportan según la representación de serie de tiempo que se deriva de la solución (ver tabla 3.8).

3.10. Componente cíclico de las variables simuladas

Para calcular el componente cíclico se utiliza las series simuladas (100 veces con 150 periodos). Los pasos son los siguientes: en primer lugar se aplica el filtro HP a cada simulación de las variables; por ejemplo, dado que el producto se ha simulado 100 veces entonces se tiene 100 series, se procede a aplicar el filtro HP a cada serie de tal manera que se obtienen 100 componentes cíclicos y 100 tendencias. Todas ellas son de la misma variable. En segundo lugar, se procede a graficar el componente tendencial y cíclico de una de las simulaciones, en este caso se ha graficado la simulación 10 (ver gráfico 3.16).

El gráfico [3.16] muestra el componente tendencial de cada variable endógena (co-

Figura 3.15: Simulación (segunda alternativa)



rrespondiente a la décima simulación). Como se puede observar, la tendencia es la serie suavizada que pasa por el medio de toda la serie. Cabe subrayar que el trabajo no tiene tendencia; la línea que fluctúa alrededor de la variable tiene el mismo valor en el eje "Y"; por tanto, no tiene tendencia ni componente cíclico.

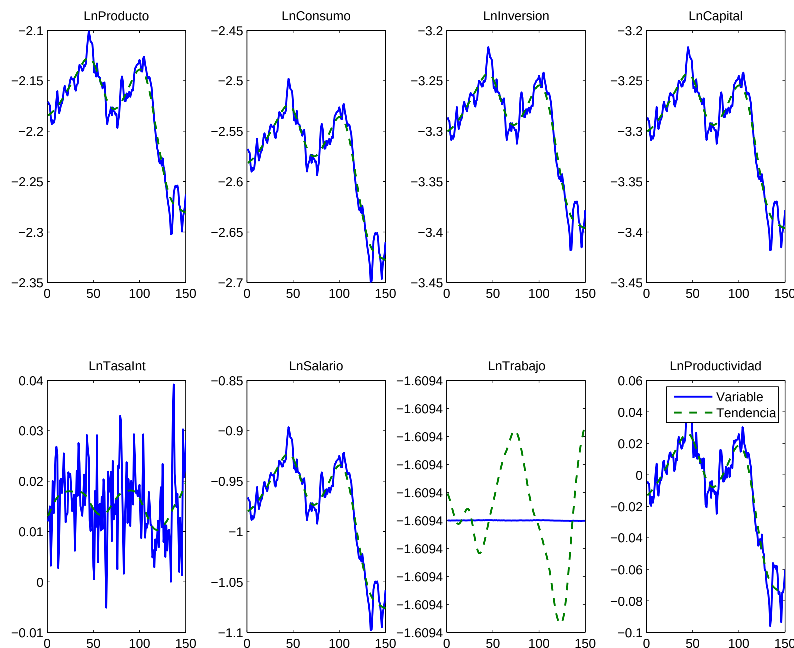
El gráfico [3.17] muestra el componente cíclico por cada variable (de la décima simulación). Dicho componente se obtiene de la diferencia entre la variable y su tendencia. Como resultado de ello, el valor promedio del componente cíclico es igual a cero. Cabe mencionar que los gráficos [3.16] y [3.17] se obtiene del código "Long_Plosser.m" (sección 4)

3.11. Cálculo de los momentos teóricos

En esta sección se tomará las 100 simulaciones de la sección previa para calcular la distribución de cada momento; en particular de la desviación estándar. Para el cálculo de los momentos del componente cíclico de las variables se utiliza el código "Long_Plosser.m" (sección 5)

El modelo supone que el error ϵ_t se distribuye como una Normal $(0,\sigma_\epsilon)$. Entonces cada una de las variables también se distribuyen como una normal, con su media y desviación estándar propia. El gráfico [3.18] muestra la desviación estándar de cada variable simulada (100 veces). El valor de desviación estándar de cada variable producida por el modelo es el promedio o la mediana de cada distribución. Por ejemplo, el promedio de la distribución de desviación estándar del lonarítmo del producto es 0.0124, de igual forma para el logarítmo del consumo es 0.0124.

Figura 3.16: Tendencia



3.12. Comparación modelo teórico con los datos

Una prueba clave que evalúa el poder de capturar la realidad por parte del modelo es comparar los momentos teóricos (brindados por el modelo) con los momentos empíricos (encontrados en los datos). El cuadro [3.9] muestra los momentos que se obtienen del modelo en comparación con aquellos obtenidos por los datos. Cabe precisar que los momentos teóricos son obtenidos utilizando el archivo "Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod", el cual considera el filro HP.

Del cuadro [3.9] se desprende dos conclusiones: la primera es que el modelo de Long y Plosser está muy lejos de replicar la realidad. Esto era de esperar por los supuestos que se ha considerado. La segunda es que el modelo puede ser fortalecido en varias direcciones; por ejemplo, se puede levantar el supuesto de depreciación total o suponer una funciónde utilidad que permita obtener una elasticidad de sustitución diferente de uno.

3.13. Códigos

En el cuadro [3.10] se indica los códigos utilizados en este capítulo.

Figura 3.17: Ciclo

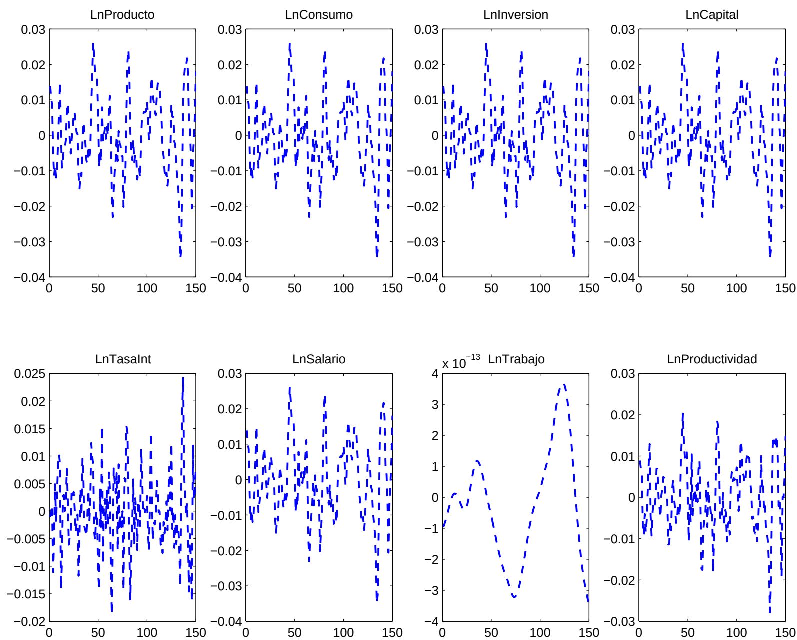
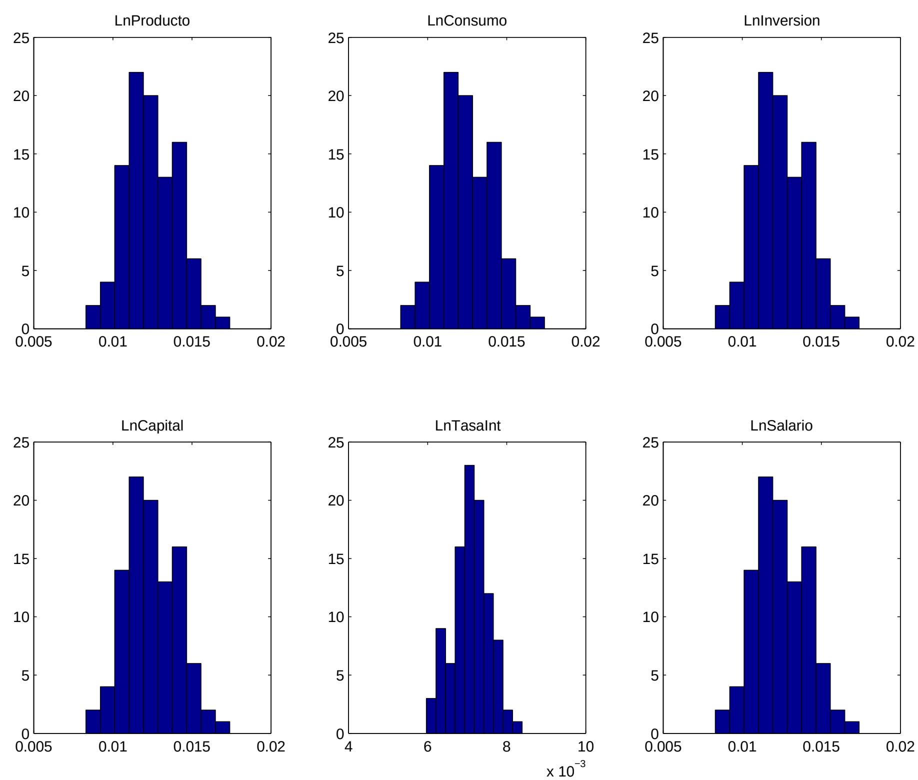


Figura 3.18: Distribución de la Des. Est.



Cuadro 3.9: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empiricos

	Datos empíricos USA		Modelo teórico	
Variable	DesEst	Corr. con producto (t)	DesEst	Corr. con producto (t)
Producto	1.72	1	0.0126 (0.0017)	1
Consumo	1.27	0.83	0.0126 (0.0017)	1
Inversión	8.24	0.91	0.0126 (0.0017)	1
Capital	5.34	0.9	0.0126 (0.0017)	1
Trabajo	1.59	0.86	0 (0)	
Salario	0.757	0.68	0.0126 (0.0017)	1
Tasa de interés			0.0072 (0.00045)	0.2841

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de Cooley y Prescott (1995), los cuales han sido calculados bajo el periodo muestral de 1954.I hasta 1991.III. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una simulación de 100 veces considerando un periodo de 150 trimestres. Los valores mostrados en el modelo teórico son los valores promedios de cada distribución. Estos valores se obtiene del archivo “Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod”.

Cuadro 3.10: Códigos en Matlab y Dynare

Códigos	Descripción
Matlab	
Long_Plosser.m	Este m-file calcula el estado estacionario, los coeficientes de la solución del modelo y se aplica el filtro HP a las variables simuladas (100 veces con 150 periodos). Además, se calcula los momentos teóricos del componente cíclico.
Long_Plosser_BlanchardKahn.m	Este m-file busca seguir paso a paso la aplicación del método de Blachard y Kahn al modelo de Long y Plosser.
ifrs_nolineal_log.m	Este m-file grafica la función impulso-respuesta del modelo Long y Plosser, el cual está descrito en el archivo mod descrito líneas abajo.
Dynare	
Long_Plosser_Dynare_nolineal_log.mod	Este .mod contiene las ecuaciones no-lineales y con las variables en logarítmo del modelo de Long y Plosser (1983, 1989).

Capítulo 4

Modelo RBC con trabajo constante

4.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es comprender detalladamente el proceso de construcción y solución de un modelo de ciclos económicos reales. Además, entender cómo se construye la simulación de las variables y cómo se obtiene la función impulo-respuesta. Para ello, en este capítulo, se analiza en detalle uno de los modelos propuestos por Campbell (1994).

El modelo base propuesto por Campbell (1994) es un modelo estacionario (sin tendencia), pero con crecimiento diferente de cero en el estado estacionario. Este modelo es un extensión del modelo de crecimiento estocástico, el cual permite rastrear los efectos dinámicos de cualquier evento aleatorio (choque).

No obstante, la solución del modelo estocástico es difícil principalmente por las no-linealidades que emergen del mismo modelo, las cuales se derivan de la interacción entre elementos multiplicativos (función de producción Cobb-Douglas) y elementos aditivos (ley de movimiento del capital). Un caso especial es el modelo propuesto por Long y Plosser (1983), descrito en el capítulo 3. En ese modelo las no-linealidades desaparecen debido al supuesto no realista que la depreciación es total; es decir, la tasa de depreciación es igual a uno ($\delta = 1$), y que además, la función de utilidad es logarítmica ($u(c_t, h_t) = lnc_t + \theta ln(1 - h_t)$). En este caso el modelo llega a ser lineal y puede ser resuelto analíticamente; en los demás casos una “solución aproximada” es requerida.

En línea con lo anterior, Campbell (1994) menciona que un *paper* típico en la literatura RBC plasma el modelo y luego se mueve directamente a la discusión de las propiedades de solución, sin especificar como se llegó a dicha solución. Lo anterior no permite que el lector entienda el proceso para obtener dichas propiedades de solución, ni la solución en sí misma.

Ante ello, el autor propone un enfoque analítico simple del modelo de crecimiento estocástico, cuya versión log-lineal puede ser resuelto analíticamente para mostrar el mecanimo de solución lo más transparente posible. Con el fin de ilustrar el método de solución, Campbell (1994) lo aplica a cuatro modelos: [1] modelo con oferta ed trabajo fija, [2] mo-

delo con oferta de trabajo variable y con función de utilidad aditivamente separable, [3] modelo con oferta de trabajo variable y con función de utilidad no aditivamente separable, y [4] el segundo modelo extendido con un choque de gasto público.

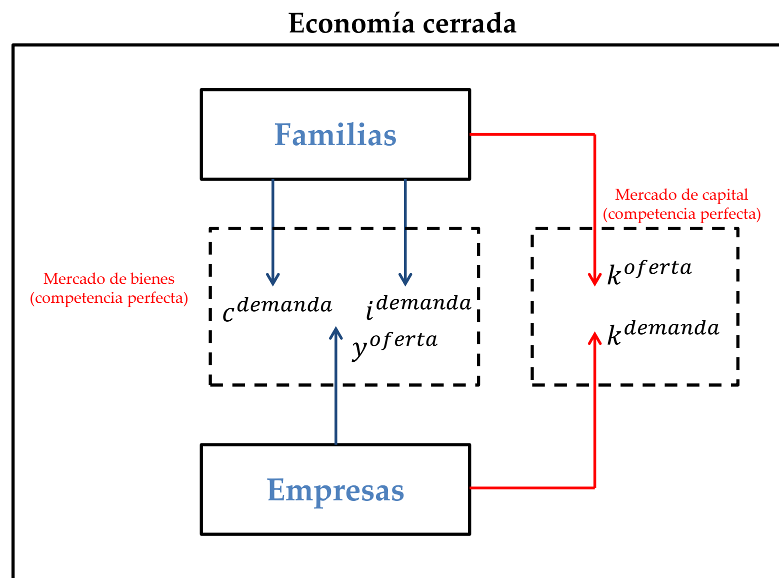
Este capítulo se centra en el primer modelo (oferta de trabajo constante), dejando para el siguiente capítulo el modelo con oferta de trabajo variable.

4.2. Construcción del modelo

Este modelo está compuesto por familias y empresas en un entorno de economía cerrada, en la cual existe un único bien. Por un lado las familias tienen trabajo fijo; es decir, todas las familias están empleadas. Por otro lado las familias son dueñas del capital y por tanto demandan bienes para invertir lo cual a su vez crea una oferta de capital. Asimismo, las familias demandan bienes de consumo.

De otro lado, las empresas tienen un tecnología para producir el único bien en la economía en función del capital. Por ello las empresas demandan capital. En la figura [4.1] se esquematiza el modelo.

Figura 4.1: Esquema del modelo de oferta de trabajo constante



4.2.1. Familias

En este modelo se asume que la economía está poblada por un conjunto de familias idénticas que tienen vida infinita. La familia representativa busca maximizar su función de utilidad descontada:

$$\underset{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{4.1}$$

Donde c_t es el consumo del periodo t y β es el factor de descuento. Además, la función de utilidad instantánea está descrita por la siguiente forma funcional:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{4.2}$$

Propiedades de la función de utilidad

La función de utilidad previa tiene un coeficiente de aversión al riesgo igual a γ y una elasticidad de sustitución intertemporal (del consumo) $\sigma = 1/\gamma$

Cálculo de $ESI^c_{t+1,t}$ (σ):

$$\begin{aligned} u_{c_t} &= c_t^{-\gamma} \\ TMgSI^c_{t+1,t} &= -E_t\left[\frac{u_{c_t}}{\beta u_{ct+1}}\right] = -E_t\left[\frac{c_t^{\gamma}}{\beta c_{t+1}^{\gamma}}\right] \\ ESI^c_{t+1,t} &= \frac{\partial ln(\frac{c_{t+1}}{c_t})}{\partial ln(TMgSI^c_{t+1,t})} = \frac{TMgSI^c_{t+1,t}}{\frac{c_{t+1}}{c_t}} \frac{1}{\frac{\partial TMgSI^c_{t+1,t}}{\partial\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)}} = \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

La elasticidad de sustitución intertemporal del consumo (σ) se entiende como la disposición de la familia de sustituir consumo hoy ($\downarrow c_t$) por consumo de mañana ($\uparrow c_{t+1}$). Cuando se dice que dicha elasticidad es fuerte (σ es grande), se entiende que el consumidor está dispuesto a reducir su consumo hoy en mayor cantidad.

De otro lado, se asume que la familia es dueña del capital físico (k_t), cuya dinámica de acumulación está representada por la ley de movimiento del capital:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{4.3}$$

Dicho capital (k_t) es alquilado a las empresas a una tasa de interés real r_t. Este flujo ($r_t k_t$) positivo representa los ingresos de la familia, los cuales son distribuidos entre el consumo (c_t) y la inversión (i_t). Esta equivalencia de flujos, para cada periodo de tiempo, está representada en la restricción presupuestaria.

$$c_t + i_t = r_t k_t \tag{4.4}$$

Problema de optimización

El problema de optimización de la familia representativa es el siguiente:

$$\underset{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = r_t k_t$$

Donde la inversión (i_t) se ha reemplazado por su expresión derivada de la ley de movimiento del capital (ecuación (4.3)). Además, cabe mencionar que las variables de control, en este problema de optimización, son: c_t y k_{t+1}.

El problema de optimización de las familias puede ser escrito como una función de Lagrange:

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \big[u(c_t) + \lambda_t\big(r_t k_t - (c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t)\big)\big]$$

Donde, de manera similar al capitulo 3 (modelo Lomg y Plosser (1983)), la versión extendida de la función de Lagrange se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & E_0\Big\{\beta^0\big[u(c_0) + \lambda_0\big(r_0k_0 - (c_0 + k_1 - (1-\delta)k_0)\big)\big] + \\
& \beta^1\big[u(c_1) + \lambda_1\big(r_1k_1 - (c_1 + k_2 - (1-\delta)k_1)\big)\big] + \\
& \beta^2\big[u(c_2) + \lambda_2\big(r_2k_2 - (c_2 + k_3 - (1-\delta)k_2)\big)\big] + \\
& \beta^3\big[u(c_3) + \lambda_3\big(r_3k_3 - (c_3 + k_4 - (1-\delta)k_3)\big)\big] + \\
& \beta^4\big[u(c_4) + \lambda_4\big(r_4k_4 - (c_4 + k_5 - (1-\delta)k_4)\big)\big] + \\
& ... + \\
& \beta^t\big[u(c_t) + \lambda_t\big(r_tk_t - (c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t)\big)\big] + \\
& \beta^{t+1}\big[u(c_{t+1}) + \lambda_{t+1}\big(r_{t+1}k_{t+1} - (c_{t+1} + k_{t+2} - (1-\delta)k_{t+1})\big)\big] + \\
& ... + \\
& ...\Big\}
\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden, en el periodo "t", son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Longrightarrow E_0\Big\{\beta^t\big[u_{c_t} + \lambda_t(-1)\big]\Big\} = 0$$

$$u_{c_t} = \lambda_t \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \Longrightarrow E_0\Big\{\beta^t\big[\lambda_t(-1)\big] + \beta^{t+1}\big[\lambda_{t+1}(r_{t+1} + (1-\delta))\big]\Big\} = 0$$

$$\lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1}(r_{t+1} + (1-\delta)) \tag{4.6}$$

Reemplazando le ecuación (4.5) en la ecuación (4.6) se obtiene la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} u_{c_t} &= \beta E_t u_{c_{t+1}}(r_{t+1} + (1-\delta)) \\ c_t^{-\gamma} &= \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma}(r_{t+1} + (1-\delta)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

En línea con Campbell (1994), se define la variable R_t como la tasa bruta de interés de la inversión en capital de un periodo, el cual es igual a la tasa de interés real neta (r_t) más el capital no depreciado $(1-\delta)$. En el periodo "t+1" esta relación se expresa de la siguiente manera.

$$R_{t+1} = r_{t+1} + (1-\delta) \tag{4.8}$$

Considerando la expresión anterior, la ecuación de Euler tendría la forma siguiente:

$$c_t^{-\gamma} = \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} \tag{4.9}$$

La ecuación de Euler expresa una comparación beneficio/costo marginal de consumir una unidad del bien. Por un lado se tiene el costo marginal de dejar de consumir una unidad adicional del bien, el cual es expresado por la utilidad marginal u_{c_t}. Por otro lado se tiene el beneficio marginal de no consumir dicha unidad del bien en "t", la cual en el periodo siguiente "$t+1$" se convierte en $1(1 + r_{t+1} - \delta)$ unidades de bien. Esto se debe a que existe una tasa de interés y una tasa de depreciación. La utilidad marginal que brinda esta unidad adicional en "t+1" es $u_{c_{t+1}} R_{t+1}$. Sin embargo, para compararlo con el costo marginal en "t" es necesario traerlo a valor presente por medio del factor de descuento "β". Por tanto, el beneficio marginal, en "t", es igual a $\beta u_{c_{t+1}}(R_{t+1})$. Esto se observa en la siguiente ecuación.

$$\underbrace{u_{c_t}}_{\text{costo marginal}} = \underbrace{\beta E_t u_{c_{t+1}}(r_{t+1} + (1-\delta))}_{\text{beneficio marginal}}$$

Por tanto, la ecuación de Euler indica que la familia está dispuesta a sacrificar consumo hoy hasta que el costo marginal de dejar de consumir una unidad del bien hoy sea igual al beneficio marginal de dicha unidad del bien traido a valor presente.

4.2.2. Empresas

Se asume que las empresas se desarrollan en un contexto de competencia perfecta tanto en el mercado de bienes como en el mercado de factores de producción. En este escenario, la empresa representativa maximiza su función de beneficios sujeta a su tecnología (función de producción). Dicho problema de optimización está descrito de la siguiente manera:

$$\underset{\{k_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}}\ \Pi_t = y_t - r_t k_t$$

Sujeto a la función de producción:

$$y_t = a_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha} \tag{4.10}$$

La función de producción solo depende de la productividad a_t y del capital k_t debido a que se asume que el trabajo h_t es constante (fijo). Además, debido a que la empresa no toma decisiones intertemporales, su problema de optimización se realiza para cada uno de los periodos. Por tanto, el problema de optimización se puede realizar en t y extender el resultado para los siguientes periodos.

Introduciendo la función de producción en la función objetivo y derivando esta última con respecto a la única variable de control (k_t), se obtiene la siguiente expresión.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k_t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial (a_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha} - r_t k_t)}{\partial k_t} = 0 \Longrightarrow (1-\alpha)\left[\frac{a_t}{k_t}\right]^{\alpha} - r_t = 0$$

De esta condición de primer orden se obtiene la demanda de capital:

$$r_t = (1-\alpha)\left[\frac{a_t}{k_t}\right]^{\alpha} \tag{4.11}$$

4.2.3. Equilibrio de mercado y definición del choque

Para completar el modelo antes descrito es necesario especificar dos ecuaciones adicionales. La primera describe el equilibrio en el mercado de bienes; es decir, todo lo que se produce en la economía debe encontrar su contraparte en los diferentes componentes del gasto agregado. La segunda especifica el comportamiento de la productividad. Con respecto a esta última, usualmente se supone que es estacionaria en media y que tiene una varianza constante. La forma estándar de representarla es asumiendo que la productividad sigue un proceso autorregresivo de orden uno.

En este modelo en particular, se asume que no existe gasto de gobierno ($g_t = 0$) y que la economía es pequeña y cerrada. Por tanto, toda la producción tendrá dos posibles destinos: el consumo (c_t) y la inversión (i_t). En ese sentido, la condición de equilibrio está descrita por la siguiente ecuación:

$$y_t = c_t + i_t \tag{4.12}$$

De otro lado, la productividad sigue un comportamiento estacionario AR(1), en la cual el choque está representado por el ruido blanco ϵ_t, que tiene una función de distribución normal con media cero y varianza constante [$N(0, \sigma_\epsilon^2)$]. En estado estacionario, se asume que dicho ruido blanco toma el valor de su media. Asimismo, cuando se dice que la economía ha sufrido un "choque" en $t = 0$ significa que en dicho periodo el ruido blanco (ϵ_t) ha dejado de ser cero y ha tomado, solo en ese periodo, algún valor proporcional a su desviación estándar ($n\sigma_\epsilon$). Usualmente, se considera que n es igual a uno. La ecuación (4.13) describe el comportamiento de la productividad.

$$lna_t = \phi lna_{t-1} + \epsilon_t \tag{4.13}$$

Cabe subrayar que el logarítmo de la productividad se comporta como un AR(1) y no la productividad en sí misma. Esto es importante porque permite que, en el estado estacionario, la productividad sea igual a uno, lo cual evita cualquier división entre cero.

4.2.4. Ecuaciones principales

Las ecuaciones principales del modelo se resumen en cuadro [4.1]:

Cuadro 4.1: Sistema de ecuaciones no lineal del modelo

Ecuaciones	Descripción
$c_t^{-\gamma} = \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1}$	Ecuación de Euler
$y_t = a_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha}$	Función de producción
$r_t = (1-\alpha)\left[\frac{a_t}{k_t}\right]^{\alpha}$	Demanda del capital
$R_t = r_t + (1-\delta)$	R_t es la tasa de interés real (bruta) r_t es la tasa de interés real (neta) que considera la depreciación
$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$	Ley de movimiento del capital
$lna_t = \phi lna_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

Nota: Estas 7 ecuaciones se pueden escribir directamente en un "mod" en Dynare para obtener la solución del modelo y los IRFs.

Este conjunto de ecuaciones representan un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales y estocásticas. Para resolver dicho sistema, como es usual en la literatura, se transforma en un sistema de ecuaciones lineales. Esto es debido a que las técnicas matemáticas de solución de sistemas lineales son ampliamente conocidas en la literatura. La solución del sistema lineal será una aproximación de la solución del sistema no-lineal. Cabe mencionar que un paso previo a la linealización de sistema de ecuaciones es la asignación de valores a los parámetros (calibración) y el cálculo del estado estacionario.

4.3. Calibración

Calibración es una metodología empírica, la cual consiste en asignar un valor a los parámetros del modelo de equilibrio general basado en una diversidad de fuentes. Según Heer y Maußner (2009), las fuentes mas comúnes son las siguientes:

1. El uso del promedio del nivel de variables económicas de series de tiempo o el promedio de los ratios de dichas variables.

2. La estimación econométrica de una ecuación.

3. Referencia a estudios econometricos basados en datos microeconómicos o macroeconómicos.

4. Ajustar los parámetros para que el modelo replique ciertos hechos empíricos como segundo momentos de los datos o impulso-respuesta de un VAR estructural.

La forma de evaluar el poder del modelo para capturar la realidad es por medio de la comparación de los valores de los segundos momentos y de las funciones impulso-respuesta con los valores obtenidos empíricamente. En el cuadro [4.2] se indica los valores de los parámetros del modelo, los cuales están basados en Campbell (1994).

Cuadro 4.2: Calibración (valores base)

Parámetro	Nombre	Sustento anual
$\alpha = 0.667$	$(1-\alpha)$ es la participación del capital en el producto	
$\delta = 0.025$	Tasa de depreciación	10 % anual
$ln(R_{ss}) = 0.015$, lleva a $R_{ss} =$ 1.015 y por tanto: $\beta = 0.9852$	Tasa de interés real bruta de estado estacionario	6.184 % anual: $(1 + 0.015)^4 - 1$
$\sigma = 0.2$	Tlasticidad de sustitución intertemporal del consumo	
$\phi = 0.95$	Persistencia del choque	
$\sigma_\epsilon = 1$	Desviación estándar del choque	

4.4. Estado estacionario

Para el cálculo del estado estacionario se considera que la variable x_t se mantiene constante. Entonces, en el estado estacionario se tiene que $x_t = x_{t+1} = x_{ss}$. Esta última condición se aplica a todas las variables endógenas. Además, en el estado estacionario el choque ϵ_{ss} toma su valor promedio, que es igual a cero.

Para la ecuación de Euler se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} \\ c_{ss}^{-\gamma} &= \beta c_{ss}^{-\gamma} R_{ss} \\ 1 &= \beta R_{ss} \\ R_{ss} &= \frac{1}{\beta} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para la función de producción:

$$\begin{aligned} y_t &= a_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha} \\ y_{ss} &= a_{ss}^{\alpha} k_{ss}^{1-\alpha} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para la demanda de capital:

$$\begin{aligned} r_t &= (1-\alpha)\left[\frac{a_t}{k_t}\right]^{\alpha} \\ r_{ss} &= (1-\alpha)\left[\frac{a_{ss}}{k_{ss}}\right]^{\alpha} \end{aligned} \tag{4.16}$$

De la ecuación de la tasa de interés bruta:

$$\begin{aligned} R_t &= r_t + (1-\delta) \\ R_{ss} &= r_{ss} + (1-\delta) \\ \text{por la ecuación (4.14):} & \\ \frac{1}{\beta} &= r_{ss} + (1-\delta) \\ r_{ss} &= \frac{1}{\beta} - (1-\delta) \qquad (4.17) \end{aligned}$$

Para la ecuación de equilibrio en el mercado de bienes:

$$\begin{aligned} y_t &= c_t + i_t \\ y_{ss} &= c_{ss} + i_{ss} \qquad (4.18) \end{aligned}$$

De la misma manera para la ley de movimiento del capital:

$$\begin{aligned} k_t &= (1-\delta)k_t + i_t \\ k_{ss} &= (1-\delta)k_{ss} + i_{ss} \\ i_{ss} &= \delta k_{ss} \qquad (4.19) \end{aligned}$$

Finalmente para la ecuación de comportamiento de la productividad:

$$\begin{aligned} lna_t &= \phi lna_{t-1} + \epsilon_t \\ lna_{ss} &= \phi lna_{ss} + \underbrace{\epsilon_{ss}}_{=0(\text{valor de su media})} \\ lna_{ss} &= \phi lna_{ss} \\ ln(a_{ss}) &= ln(a_{ss}^{\phi}) \\ a_{ss} &= a_{ss}^{\phi} \qquad (4.20) \end{aligned}$$

Al igual que en el modelo de Long y Plosser (1983), dos valores de a_{ss} podrían resolver esta última ecuación (4.20): $a_{ss} = 1$ o $a_{ss} = 0$. Sin embargo, solo cuando $a_{ss} = 1$, el lna_{ss} existe. Por tanto, la solución correcta es $a_{ss} = 1$. La ventaja de considerar la ecuación del choque de productividad en logaritmos es que evita que la productividad en estado estacionario pueda ser cero. Esto es importante porque evita que en las ecuaciones de estado estacionario y en las ecuaciones log-lineales se encuentre algún número o variable divida por cero.

Hasta aquí se ha encontrado el valor de estado estacionario de la tasa de interés bruta R_{ss}, de la tasa de interés neta r_{ss} y de la productividad a_{ss}; sin embargo para encontrar el estado estacionario para las demás variables se tiene que hacer algunas operaciones algebraicas adicionales. De la ecuación (4.16) se tiene:

$$r_{ss} = (1-\alpha)\left[\frac{a_{ss}}{k_{ss}}\right]^{\alpha}$$

Como ya se conoce el valor de r_{ss} por la ecuación (4.17) y de a_{ss}, entonces se puede conocer el valor del capital k_{ss}.

$$\begin{aligned} r_{ss} &= (1-\alpha)\left[\frac{a_{ss}}{k_{ss}}\right]^{\alpha} \\ k_{ss} &= a_{ss}\left[\frac{r_{ss}}{(1-\alpha)}\right]^{-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Debido a que ya se conoce k_{ss}, entonces se puede hallar el valor del producto y_{ss}, de la inversión i_{ss} y del consumo c_{ss}:

$$y_{ss} = a_{ss}^{\alpha}k_{ss}^{1-\alpha}, \quad \text{de la ecuación (4.15)} \tag{4.22}$$
$$i_{ss} = \delta k_{ss}, \quad \text{de la ecuación (4.19)} \tag{4.23}$$
$$c_{ss} = y_{ss} - i_{ss}, \quad \text{de la ecuación (4.18)} \tag{4.24}$$

En el cuadro [4.3] se resume la expresión del estado estacionario de cada variable del modelo.

Cuadro 4.3: Estado estacionario

Estado estacionario (forma recursiva)	Estado estacionario (forma paramétrica)
$R_{ss} = \frac{1}{\beta}$	$= \frac{1}{\beta}$
$r_{ss} = R_{ss} - (1-\delta)$	$= \frac{1}{\beta} - (1-\delta)$
$a_{ss} = 1$	$= 1$
$k_{ss} = a_{ss}\left[\frac{r_{ss}}{(1-\alpha)}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$	$= \left[\frac{\frac{1}{\beta}-(1-\delta)}{1-\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$
$y_{ss} = a_{ss}^{\alpha}k_{ss}^{1-\alpha}$	$= \left[\frac{\frac{1}{\beta}-(1-\delta)}{1-\alpha}\right]^{-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}$
$i_{ss} = \delta k_{ss}$	$= \delta\left[\frac{\frac{1}{\beta}-(1-\delta)}{1-\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$
$c_{ss} = y_{ss} - i_{ss}$	$= \left[\frac{\frac{1}{\beta}+\alpha\delta-1}{1-\alpha}\right]\left[\frac{\frac{1}{\beta}-(1-\delta)}{1-\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$

Nota: El cálculo de los estados estacionarios se encuentran en Campbell_Lfijo.m (sección 1).

4.5. Log-linealización

El sistema de ecuaciones que describe el modelo de Campbell (1994) es no lineal. Esta característica del modelo dificulta la forma de encontrar la solución de dicho sistema. Una forma estándar de abordar esta dificultad es log-linealizar cada ecuación; es decir, convertir una ecuación no lineal en una ecuación lineal en términos de log desviación de la variable con respecto a su estado estacionario. Además, para pequeñas desviaciones del estado estacionario, la log desviación de una variable tiene una interpretación económica

importante: ella es aproximadamente igual a la desviación, en porcentaje, del estado estacionario (Uhlig, 1995).

La ventaja de aplicar log-linealización es que convierte el sistema no lineal en lineal, al cual se le puede aplicar los métodos matemáticos estándar para resolver dichos sistemas (Blanchard y Kahn, 1981).

En primer lugar, se define la variable en log-desviaciones:

$$\widehat{x}_t = lnx_t - lnx_{ss} \tag{4.25}$$

En segundo lugar, despejando la variable x_t de la ecuación [4.25] se tiene:

$$x_t = x_{ss}e^{\widehat{x}_t} \tag{4.26}$$

En tercer lugar, se hace una aproximación de Taylor de primer orden de $e^{\widehat{x}_t}$ con respecto al estado estacionario, en el cual $\widehat{x}_t = 0$; es decir, $x_t = x_{ss}$:

$$\begin{aligned} e^{\widehat{x}_t}\big|_{\widehat{x}_t=0} &\cong e^{\widehat{x}_t=0} + e^{\widehat{x}_t=0}(\widehat{x}_t - 0) \\ e^{\widehat{x}_t}\big|_{\widehat{x}_t=0} &\cong 1 + \widehat{x}_t \\ e^{\widehat{x}_t} &\cong 1 + \widehat{x}_t \end{aligned} \tag{4.27}$$

Esta última ecuación se reemplaza en la ecuación (4.26):

$$x_t = x_{ss}e^{\widehat{x}_t} \cong x_{ss}(1 + \widehat{x}_t) \tag{4.28}$$

De la ecuación (4.28) se despeja $\widehat{x}_t$:

$$\widehat{x}_t \cong \frac{x_t - x_{ss}}{x_{ss}} \tag{4.29}$$

Por tanto, la variable en log-desviaciones es aproximadamente igual a la desviación, en porcentaje, del estado estacionario. De un punto de vista práctico, se puede reemplazar cada variable por su expresión log-lineal y luego se aplica la aproximación de primer orden según la ecuación (4.27).

Log-linealizando la ecuación de Euler se tiene:

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \beta E_t c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} \\ \left[c_{ss}e^{\widehat{c}_t}\right]^{-\gamma} &= \beta E_t\left[c_{ss}e^{\widehat{c}_{t+1}}\right]^{-\gamma}\left[R_{ss}e^{\widehat{R}_{t+1}}\right] \\ e^{-\gamma\widehat{c}_t} &= E_t e^{-\gamma\widehat{c}_{t+1}} e^{\widehat{R}_{t+1}} \\ e^{-\gamma\widehat{c}_t} &= E_t e^{-\gamma\widehat{c}_{t+1}+\widehat{R}_{t+1}} \\ 1-\gamma\widehat{c}_t &= E_t\left[1-\gamma\widehat{c}_{t+1}+\widehat{R}_{t+1}\right] \\ \widehat{c}_t &= E_t\left[\widehat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma}\widehat{R}_{t+1}\right] \end{aligned} \tag{4.30}$$

Haciendo lo mismo para la función de producción: '

$$
\begin{aligned}
y_t &= a_t^{\alpha} k_t^{1-\alpha} \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= \left[a_{ss} e^{\widehat{a}_t}\right]^{\alpha} \left[k_{ss} e^{\widehat{k}_t}\right]^{1-\alpha} \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= a_{ss}^{\alpha} e^{\alpha \widehat{a}_t} k_{ss}^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)\widehat{k}_t} \\
e^{\widehat{y}_t} &= e^{\alpha \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t} \\
1 + \widehat{y}_t &= 1 + \alpha \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t \\
\widehat{y}_t &= \alpha \widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

Con respecto a la demanda de capital:

$$
\begin{aligned}
r_t &= (1-\alpha)\left(\frac{a_t}{k_t}\right)^{\alpha} \\
r_{ss} e^{\widehat{r}_t} &= (1-\alpha)\left(\frac{a_{ss} e^{\widehat{a}_t}}{k_{ss} e^{\widehat{k}_t}}\right)^{\alpha} \\
r_{ss} e^{\widehat{r}_t} &= (1-\alpha)\left(\frac{a_{ss}}{k_{ss}}\right)^{\alpha} \left(\frac{e^{\widehat{a}_t}}{e^{\widehat{k}_t}}\right)^{\alpha} \\
r_{ss} e^{\widehat{r}_t} &= (1-\alpha)\left(\frac{a_{ss}}{k_{ss}}\right)^{\alpha} (e^{\alpha(\widehat{a}_t - \widehat{k}_t)}) \\
e^{\widehat{r}_t} &= e^{\alpha(\widehat{a}_t - \widehat{k}_t)} \\
1 + \widehat{r}_t &= 1 + \alpha(\widehat{a}_t - \widehat{k}_t) \\
\widehat{r}_t &= \alpha(\widehat{a}_t - \widehat{k}_t) \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

En el caso de la tasa bruta de interés, su forma log-lineal se obtiene de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
R_t &= r_t + (1-\delta) \\
R_{ss} e^{\widehat{R}_t} &= r_{ss} e^{\widehat{r}_t} \\
R_{ss}(1 + \widehat{R}_t) &= r_{ss}(1 + \widehat{r}_t) \\
\widehat{R}_t &= \frac{r_{ss}}{R_{ss}} \widehat{r}_t \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

En el equilibrio de mercado de bienes:

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + i_t \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= c_{ss} e^{\widehat{c}_t} + i_{ss} e^{\widehat{i}_t} \\
y_{ss}(1 + \widehat{y}_t) &= c_{ss}(1 + \widehat{c}_t) + i_{ss}(1 + \widehat{i}_t) \\
y_{ss} + y_{ss}\widehat{y}_t &= c_{ss} + c_{ss}\widehat{c}_t + i_{ss} + i_{ss}\widehat{i}_t \\
y_{ss}\widehat{y}_t &= c_{ss}\widehat{c}_t + i_{ss}\widehat{i}_t \\
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

La ley de moviento de capital en su forma log-lineal quedaría:

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t \\
k_{ss}e^{\widehat{k}_{t+1}} &= (1-\delta)k_{ss}e^{\widehat{k}_t} + i_{ss}e^{\widehat{i}_t} \\
k_{ss}(1+\widehat{k}_{t+1}) &= (1-\delta)k_{ss}(1+\widehat{k}_t) + i_{ss}(1+\widehat{i}_t) \\
k_{ss} + k_{ss}\widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)k_{ss} + (1-\delta)k_{ss}\widehat{k}_t + i_{ss} + i_{ss}\widehat{i}_t \\
k_{ss}\widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)k_{ss}\widehat{k}_t + i_{ss}\widehat{i}_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\widehat{k}_t + \frac{i_{ss}}{k_{ss}}\widehat{i}_t \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de la productividad:

$$\begin{aligned}
lna_t &= \phi lna_{t-1} + \epsilon_t \\
lna_{ss}e^{\widehat{a}_t} &= \phi lna_{ss}e^{\widehat{a}_{t-1}} + \epsilon_t \\
lna_{ss} + \widehat{a}_t &= \phi lna_{ss} + \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \\
\widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

El cuadro [4.4] resume las ecuaciones log-lineal del modelo:

Cuadro 4.4: Ecuaciones log-lineal

	Ecuaciones log-lineal	Descripción
[1]	$\widehat{c}_t = E_t\big[\widehat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma}\widehat{R}_{t+1}\big]$	Ecuación de Euler
[2]	$\widehat{y}_t = \alpha\widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t$	Función de producción
[3]	$\widehat{r}_t = \alpha[\widehat{a}_t - \widehat{k}_t]$	Demanda de capital
[4]	$\widehat{R}_t = \frac{r_{ss}}{R_{ss}}\widehat{r}_t$	Tasa de interés bruta
[5]	$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t$	Equilibrio en el mercado de bienes
[6]	$\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \frac{i_{ss}}{k_{ss}}\widehat{i}_t$	Ley de movimiento del capital
[7]	$\widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

Nota: Para obtener directamente la solución del modelo con Dynare se puede utilizar el mod "Campbell_Lfijo_Dynare.mod"

El número de ecuaciones del cuadro [4.4] se puede resumir en cinco, para ello se introduce la ecuación de equilibrio del mercado de bienes (ecuación 5) en la ecuación del movimiento del capital (ecuación 6). La variable que relaciona ambas ecuaciones es la inversión. En primer lugar se despeja la inversión de la ecuación 5:

$$\widehat{i}_t = \left[\widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t\right]\frac{y_{ss}}{i_{ss}}$$

En segundo lugar, se introduce esta ecuación en la ley de movimiento de capital:

$$\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \frac{i_{ss}}{k_{ss}}\left(\left[\widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t\right]\frac{y_{ss}}{i_{ss}}\right)$$

Además, se introduce la ecuación de la función de producción (y_t):

$$\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \frac{i_{ss}}{k_{ss}}\left(\left[\left(\alpha\widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t\right) - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t\right]\frac{y_{ss}}{i_{ss}}\right)$$

Ordenando los términos algrebraicos se tiene:

$$\widehat{k}_{t+1} = \underbrace{\left[(1-\delta) + \delta(1-\alpha)\frac{y_{ss}}{i_{ss}}\right]}_{\lambda_1}\widehat{k}_t + \underbrace{\delta\alpha\frac{y_{ss}}{i_{ss}}}_{\lambda_2}\widehat{a}_t - \delta\frac{c_{ss}}{i_{ss}}\widehat{c}_t \tag{4.37}$$

De los coeficientes de la ecuación (4.37) se demuestra que:

$$-\delta\frac{c_{ss}}{i_{ss}} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

Por tanto, la ecuación final es:

$$\widehat{k}_{t+1} = \lambda_1\widehat{k}_t + \lambda_2\widehat{a}_t + (1-\lambda_1-\lambda_2)\widehat{c}_t \tag{4.38}$$

De otro lado, la ecuación [3] (demanda de capital) se introduce en la ecuación [4] (tasa de interés bruta):

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_t &= \alpha\frac{r_{ss}}{R_{ss}}\widehat{r}_t \\
\widehat{R}_t &= \alpha\frac{r_{ss}}{R_{ss}}[\widehat{a}_t - \widehat{k}_t] \\
\widehat{R}_t &= \lambda_3[\widehat{a}_t - \widehat{k}_t] \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Donde en la ecuación previa se ha definido el coeficiente λ_3:

$$\lambda_3 = \alpha\frac{r_{ss}}{R_{ss}}$$

El cuadro [4.5] resume las cinco principales ecuaciones log-lineal del modelo de trabajo fijo de Campbell (1994).

Cuadro 4.5: Ecuaciones log-lineal (sistema reducido)

	Ecuaciones log-lineal
[1]	$\widehat{c}_t = E_t\left[\widehat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma}\widehat{R}_{t+1}\right]$
[2]	$\widehat{y}_t = \alpha\widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t$
[3]	$\widehat{R}_t = \lambda_3[\widehat{a}_t - \widehat{k}_t]$
[4]	$\widehat{k}_{t+1} = \lambda_1\widehat{k}_t + \lambda_2\widehat{a}_t + (1-\lambda_1-\lambda_2)\widehat{c}_t$
[5]	$\widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$

4.5.1. Efecto sustitución y efecto ingreso de la tasa de interés

Antes de resolver el sistema log-lineal es importante analizar el impacto de la tasa de interés real sobre el consumo. Para abordar este análisis es muy útil utilizar las ecuaciones log-lineales.

La teoría del consumidor sugiere que cuando el precio (p_t) de un bien (q_t) cambia hay dos efectos sobre el consumidor: primero, el precio de q_t relativo a otros productos cambia. Segundo, debido al cambio en p_t, el ingreso real del consumidor también cambia. El cambio del consumo óptimo como resultado de un cambio en el precio contiene ambos efectos.

El efecto sustitución es el efecto obtenido solo por el cambio de precios relativos, manteniendo constante el ingreso real. Mientras que el efecto ingreso es el efecto obtenido solo por el cambio en el ingreso real.

La tasa de interés representa el precio relativo de la canasta en el periodo "t+1´´ (c_{t+1}) con respecto a hoy (c_t). Por tanto, un cambio en la tasa de interés producirá dos efectos: sustitución e ingreso.

Efecto sustitución (ES): un incremento en la tasa de interés real hace que el consumo de mañana c_{t+1} sea relativamente menos costoso comparado con el consumo de hoy c_t. Esto se debe a que el ahorro es más rentable para alcanzar el mismo monto de consumo mañana; es decir, el consumidor necesita sacrificar menos consumo hoy. Por tanto, el efecto sustitución se resume en:

$$\uparrow R_t \xrightarrow{\text{Efecto Sustitución}} \downarrow c_t \text{ y } \uparrow c_{t+1}$$

Cabe mencionar que la ecuación de Euler refleja el efecto sustitución del consumo. Además, σ es la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.

$$\widehat{c}_t = E_t\big[\widehat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma}\widehat{R}_{t+1}\big]$$

La magnitud del efecto sustitución es controlado por σ, mientras más grande sea σ mayor será el efecto sustitución; es decir:

$$\uparrow R_t \xrightarrow{\text{Efecto Sustitución}} \downarrow\downarrow c_t \text{ y } \uparrow\uparrow c_{t+1}$$

Efecto ingreso (EI): un incremento de la tasa de interés produce un efecto ingreso. Si el consumidor tiene activos (bonos o ahorro), un incremento de la tasa de interés produce mayores ganancias por esos activos y por tanto mayor ingreso. Este efecto tiende a incrementar el consumo en todos los periodos.

$$\uparrow R_t \xrightarrow{\text{Efecto Ingreso}} \uparrow c_t \text{ y } \uparrow c_{t+1}$$

Cabe mencionar que la restricción presupuestaria refleja el efecto ingreso:

$$c_t + i_t = r_t k_t$$

Un incremento de la tasa de interés produce dos efectos:				
ES $\rightarrow$	$\downarrow c_t$	y	$\uparrow c_{t+1}$	(Ecuación de Euler)
EI $\rightarrow$	$\uparrow c_t$	y	$\uparrow c_{t+1}$	(Restricción presupuestaria)
	$---$		$---$	
ET $\rightarrow$	Depende de ESI σ	y	$\uparrow c_{t+1}$	

Efecto total (ET): para observar el efecto final de la tasa de interés sobre el consumo nos basaremos en la restriccón presupuestaria y la ecuación de Euler (de las variables en niveles).

$$
\begin{aligned}
c_t + i_t &= r_k k_t && (4.40)\\
\text{pero se sabe} &: \\
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t \\
\text{despejando } i_t &: \\
i_t &= k_{t+1} - (1-\delta)k_t && (4.41)\\
(4.41) \text{ en } (4.40) &: \\
c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t &= r_k k_t \\
c_t + k_{t+1} &= \underbrace{(r_k + (1-\delta))}_{R_t} k_t \\
c_t + k_{t+1} &= R_t k_t && (4.42)
\end{aligned}
$$

Como se sabe el ingreso de la familia representativa en “t” es $R_t k_t$, la cual se resumirá en A_t. De igual forma para el ingreso en “t+1”: $R_{t+1}k_{t+1} = A_{t+1}$. Reescribiendo la ecuación (4.42) en términos de ingreso se tiene:

$$
\begin{aligned}
c_t + k_{t+1} &= R_t k_t \\
c_t + \frac{R_{t+1}k_{t+1}}{R_{t+1}} &= R_t k_t \\
c_t + \frac{A_{t+1}}{R_{t+1}} &= A_t && (4.43)
\end{aligned}
$$

La ecuación (4.43) es una ecuanción en diferencias, la cual se puede resolver iterando hacia adelante. Por inducción matemática hacemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
A_t &= c_t + \frac{A_{t+1}}{R_{t+1}} && (4.44)\\
A_{t+1} &= c_{t+1} + \frac{A_{t+2}}{R_{t+2}} && (4.45)\\
A_{t+2} &= c_{t+2} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+3}} && (4.46)
\end{aligned}
$$

Luego la ecuación (4.46) se reemplaza en (4.45):

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= c_{t+1} + \frac{A_{t+2}}{R_{t+2}} \\ A_{t+1} &= c_{t+1} + \frac{1}{R_{t+2}}(c_{t+2} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+3}}) \\ A_{t+1} &= c_{t+1} + \frac{c_{t+2}}{R_{t+2}} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+2}R_{t+3}} \end{aligned} \tag{4.47}$$

La ecuación (4.47) se reemplaza en (4.44):

$$\begin{aligned} A_t &= c_t + \frac{A_{t+1}}{R_{t+1}} \\ A_t &= c_t + \frac{1}{R_{t+1}}(c_{t+1} + \frac{c_{t+2}}{R_{t+2}} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+2}R_{t+3}}) \\ A_t &= c_t + + \frac{c_{t+1}}{R_{t+1}} + \frac{c_{t+2}}{R_{t+1}R_{t+2}} + \frac{A_{t+3}}{R_{t+1}R_{t+2}R_{t+3}} \end{aligned} \tag{4.48}$$

Dividiendo toda la ecuación (4.48) por R_t para hacer una generalización (en sumatoria) más sencilla:

$$\begin{aligned} \frac{A_t}{R_t} &= \frac{c_t}{R_t} + \frac{c_{t+1}}{R_t R_{t+1}} + \frac{c_{t+2}}{R_t R_{t+1} R_{t+2}} + \frac{A_{t+3}}{R_t R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3}} \\ \text{resumiendo} &: \text{en una sumatoria...} \\ \frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^{2} \frac{c_{t+s}}{\prod_{j=0}^{s} R_{t+j}} + \frac{A_{t+3}}{\prod_{j=0}^{3} R_{t+j}} \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} \text{generalizando para “n”} &: \\ \frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^{n} \frac{c_{t+s}}{\prod_{j=0}^{s} R_{t+j}} + \frac{A_{t+(n+1)}}{\prod_{j=0}^{n+1} R_{t+j}} \\ \text{aplicando } \textbf{Limite} \text{ cuando} &: n \to \infty \\ \frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{t+s}}{\prod_{j=0}^{s} R_{t+j}} + \underbrace{\text{Lim}_{n\to\infty} \frac{A_{t+(n+1)}}{\prod_{j=0}^{n+1} R_{t+j}}}_{=0 (\text{por transversalidad})} \end{aligned}$$

$$\frac{A_t}{R_t} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{t+s}}{\prod_{j=0}^{s} R_{t+j}} \tag{4.50}$$

Para encontrar la relación de la tasa de interés con el consumo de hoy es necesario encontrar la relación del c_{t+s} con el consumo actual c_t, para ello se usa la ecuación de Euler (abstrayendo el operador expectativa) para “t”, “$t+1$” y “$t+2$”:

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \beta c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} \\ c_{t+1}^{-\gamma} &= \beta c_{t+2}^{-\gamma} R_{t+2} \\ c_{t+2}^{-\gamma} &= \beta c_{t+3}^{-\gamma} R_{t+3} \end{aligned}$$

Multiplicando estas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
c_t^{-\gamma} c_{t+1}^{-\gamma} c_{t+2}^{-\gamma} &= \beta^3 c_{t+1}^{-\gamma} R_{t+1} c_{t+2}^{-\gamma} R_{t+2} c_{t+3}^{-\gamma} R_{t+3} \\
c_t^{-\gamma} &= \beta^3 c_{t+3}^{-\gamma} \frac{R_t}{R_t} R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3} \\
c_t^{-\gamma} &= \beta^3 \frac{c_{t+3}^{-\gamma}}{R_t} \prod_{j=0}^{3} R_{t+j} \\
\text{generalizando para "s"} &: \\
c_t^{-\gamma} &= \beta^s \frac{c_{t+s}^{-\gamma}}{R_t} \prod_{j=0}^{s} R_{t+j} \\
\left(\frac{c_{t+s}}{c_t}\right)^{-\gamma} &= \frac{R_t}{\beta^s \prod_{j=0}^{s} R_{t+j}} \\
\text{despejando } c_{t+s} &: \\
c_{t+s} &= \left[\frac{R_t}{\beta^s \prod_{j=0}^{s} R_{t+j}}\right]^{-\frac{1}{\gamma}} c_t \qquad (4.51)
\end{aligned}$$

Introduciendo la ecuación (4.51) en la ecuación (4.50):

$$\begin{aligned}
\frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{R_t}{\beta^s \prod_{j=0}^{s} R_{t+j}}\right]^{\frac{-1}{\gamma}} c_t}{\prod_{j=0}^{s} R_{t+j}} \\
\frac{A_t}{R_t} &= \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} [\prod_{j=0}^{s} R_{t+j}]^{\frac{1}{\gamma}-1} c_t R_t^{-1/\gamma} \\
\frac{A_t}{R_t} &= c_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} [\prod_{j=0}^{s} R_{t+j}]^{\frac{1}{\gamma}-1} R_t^{-1/\gamma}\right] \qquad (4.52)
\end{aligned}$$

Caso simplificado: para analizar el efecto de la tasa de interés sobre el consumo de hoy c_t se supone que la tasa de interés es la misma en todos los periodos; es decir, $R_t = R_{t+1} = R_{t+2} = ... = R_{t+j} = R$. Introduciendo este supuesto en la productoria de la ecuación (4.52) se tiene:

$$\prod_{j=0}^{s} R_{t+j} = R_{s+1}$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación (4.52) se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{A_t}{R} &= c_t\Big[\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{\frac{s}{\gamma}}\big[R^{s+1}\big]^{\frac{1}{\gamma}-1}R^{-1/\gamma}\Big] \\
\frac{A_t}{R} &= c_t\Big[\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{\frac{s}{\gamma}}R^{(s+1)\frac{1}{\gamma}-1}R^{-1/\gamma}\Big] \\
\frac{A_t}{R} &= c_t\Big[\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{\frac{s}{\gamma}}R^{(s(\frac{1}{\gamma}-1)+\frac{1}{\gamma}-1}R^{-1/\gamma}\Big] \\
\frac{A_t}{R} &= c_t\Big[\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{\frac{s}{\gamma}}R^{(s(\frac{1}{\gamma}-1)}R^{-1}\Big] \\
A_t &= c_t\Big[\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{\frac{s}{\gamma}}R^{(s(\frac{1}{\gamma}-1)}\Big] \\
A_t &= c_t\Big[\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\Big)^s\Big] \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

Por progresión geométrica de $\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\Big)^s$ se tiene que:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\Big)^s = 1+\Big(\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\Big)+\Big(\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\Big)^2+\Big(\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\Big)^3... = \frac{1}{1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}} \qquad (4.54)$$

Reemplazando la expresión (4.54) en la ecuación (4.53) se tiene:

$$\begin{aligned}
A_t &= c_t\Big[\frac{1}{1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}}\Big] \\
c_t &= A_t\big[1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\big] \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

Aplicando logarítmo a la ecuación (4.55) se tiene:

$$ln(A_t) = ln(c_t) + ln\big[1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\big] \qquad (4.56)$$

Aplicando la aproximación de Taylor de primer orden a $ln\big[1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\big]$ se tiene que:

$$ln\big[1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}\big] \approx -\beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1} \qquad (4.57)$$

Reemplazando (4.57) en (4.56):

$$ln(A_t) = ln(c_t) + \beta^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1} \qquad (4.58)$$

Tomando diferencial a la ecuación (4.58) y considerando que A_t no cambia, y además, $\frac{1}{\gamma}=\sigma$ (ESI), entonces:

$$\begin{aligned}
\Delta ln(c_t) &= -(\sigma-1)\beta^{\sigma}R^{\sigma}\Delta R \\
\frac{\Delta ln(c_t)}{\Delta R} &= -(\sigma-1)\beta^{\sigma}R^{\sigma} \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

La ecuación (4.59) refleja el efecto final sobre el consumo de hoy un movimiento de la tasa de interés real. Una conclusión importante es que el **efecto final** depende de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo (σ). La expresión siguiente muestra el efecto final sobre el consumo dependiendo del valor de la ESI:

$$
\begin{aligned}
\sigma < 1 \quad &\longrightarrow \quad \frac{\Delta ln(c_t)}{\Delta R} > 0 \longrightarrow \uparrow c_t \\
\sigma = 1 \quad &\longrightarrow \quad \frac{\Delta ln(c_t)}{\Delta R} = 0 \longrightarrow \text{R no afecta el consumo} \\
\sigma > 1 \quad &\longrightarrow \quad \frac{\Delta ln(c_t)}{\Delta R} < 0 \longrightarrow \downarrow c_t
\end{aligned}
$$

Caso general: considerando la ecuación (4.52) y desarrollandola se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{A_t}{R_t} &= c_t\Big[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} [\prod_{j=0}^{s} R_{t+j}]^{\frac{1}{\gamma}-1} R_t^{-1/\gamma}\Big] \\
\frac{A_t}{R_t^{1-1/\gamma}} &= c_t\Big[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^{\frac{s}{\gamma}} [\prod_{j=0}^{s} R_{t+j}]^{\frac{1}{\gamma}-1}\Big] \\
& \text{siendo explícito en la sumatoria:} \\
\frac{A_t}{R_t^{1-1/\gamma}} &= c_t\Big[1 + \underbrace{\beta^{\frac{1}{\gamma}} (R_t R_{t+1})^{\frac{1}{\gamma}-1} + \beta^{\frac{2}{\gamma}} (R_t R_{t+1} R_{t+2})^{\frac{1}{\gamma}-1} + \beta^{\frac{3}{\gamma}} (R_t R_{t+1} R_{t+2} R_{t+3})^{\frac{1}{\gamma}-1} ...}_{N_t}\Big] \\
A_t &= c_t R_t^{1-1/\gamma}[1 + N_t] \\
A_t &= c_t R_t^{1-1/\gamma} + c_t R_t^{1-1/\gamma} N_t \qquad (4.60)
\end{aligned}
$$

Diferenciando la ecuación (4.60) con respecto a R_{t+1} y considerando que R_j $(j \neq 1)$ no depende de R_{t+1}:

$$
\frac{\Delta A_t}{\Delta R_{t+1}} = R_t^{1-1/\gamma} \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} + \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} R_t^{1-1/\gamma} N_t + c_t R_t^{1-1/\gamma} \frac{\Delta N_t}{\Delta R_{t+1}} \qquad (4.61)
$$

Desarrollando el diferencial: $\frac{\Delta N_t}{\Delta R_{t+1}}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta N_t}{\Delta R_{t+1}} &= (\frac{1}{\gamma}-1)\beta^{\frac{1}{\gamma}}(R_tR_{t+1})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_t + (\frac{1}{\gamma}-1)\beta^{\frac{2}{\gamma}}(R_tR_{t+1}R_{t+2})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_tR_{t+2} + \\
&\quad (\frac{1}{\gamma}-1)\beta^{\frac{3}{\gamma}}(R_tR_{t+1}R_{t+2}R_{t+3})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_tR_{t+2}R_{t+3} + ... \\
&\quad \text{multiplicando y dividiendo por } R_{t+1} \\
&= \frac{1}{R_{t+1}}\Big[(\frac{1}{\gamma}-1)\beta^{\frac{1}{\gamma}}(R_tR_{t+1})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_tR_{t+1} + (\frac{1}{\gamma}-1)\beta^{\frac{2}{\gamma}}(R_tR_{t+1}R_{t+2})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_tR_{t+1}R_{t+2} + \\
&\quad (\frac{1}{\gamma}-1)\beta^{\frac{3}{\gamma}}(R_tR_{t+1}R_{t+2}R_{t+3})^{\frac{1}{\gamma}-2}R_tR_{t+1}R_{t+2}R_{t+3} + ...\Big] \\
&= \frac{1}{R_{t+1}}(\frac{1}{\gamma}-1)\Big[\beta^{\frac{1}{\gamma}}(R_tR_{t+1})^{\frac{1}{\gamma}-1} + \beta^{\frac{2}{\gamma}}(R_tR_{t+1}R_{t+2})^{\frac{1}{\gamma}-1} + \beta^{\frac{3}{\gamma}}(R_tR_{t+1}R_{t+2}R_{t+3})^{\frac{1}{\gamma}-1} + ...\Big] \\
&= \frac{1}{R_{t+1}}(\frac{1}{\gamma}-1)N_t \\
&= (\frac{1}{\gamma}-1)\frac{N_t}{R_{t+1}} \qquad (4.62)
\end{aligned}
$$

Introduciendo la ecuación (4.62) en la ecuación (4.61):

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta A_t}{\Delta R_{t+1}} &= R_t^{1-1/\gamma}\frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} + \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}}R_t^{1-1/\gamma}N_t + c_tR_t^{1-1/\gamma}\frac{\Delta N_t}{\Delta R_{t+1}} \qquad (4.63) \\
\frac{\Delta A_t}{\Delta R_{t+1}} &= R_t^{1-1/\gamma}\frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}} + \frac{\Delta c_t}{\Delta R_{t+1}}R_t^{1-1/\gamma}N_t + c_tR_t^{1-1/\gamma}(\frac{1}{\gamma}-1)\frac{N_t}{R_{t+1}} \\
\Delta A_t &= R_t^{1-1/\gamma}\Delta c_t + \Delta c_tR_t^{1-1/\gamma}N_t + \Delta R_{t+1}c_tR_t^{1-1/\gamma}(\frac{1}{\gamma}-1)\frac{N_t}{R_{t+1}}
\end{aligned}
$$

Se sabe que $\Delta A_t = 0$, entonces:

$$
\begin{aligned}
0 &= R_t^{1-1/\gamma}\Delta c_t + \Delta c_tR_t^{1-1/\gamma}N_t + \Delta R_{t+1}c_tR_t^{1-1/\gamma}(\frac{1}{\gamma}-1)\frac{N_t}{R_{t+1}} \\
0 &= R_t^{1-1/\gamma}[\Delta c_t + \Delta c_tN_t + (\frac{1}{\gamma}-1)c_tN_t\frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}}] \\
0 &= \Delta c_t + \Delta c_tN_t + (\frac{1}{\gamma}-1)c_tN_t\frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}} \\
0 &= \Delta c_t[1+N_t] + (\frac{1}{\gamma}-1)c_tN_t\frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}}
\end{aligned}
$$

Ordenando algebraicamente los términos, se tiene:

$$
\begin{aligned}
-\Delta c_t[1+N_t] &= (\frac{1}{\gamma}-1)c_tN_t\frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}} \\
-\frac{\Delta c_t}{c_t}\frac{[1+N_t]}{N_t} &= (\frac{1}{\gamma}-1)\frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}} \\
\frac{\Delta c_t}{c_t} &= -(\frac{1}{\gamma}-1)\frac{N_t}{1+N_t}\frac{\Delta R_{t+1}}{R_{t+1}} \qquad (4.64)
\end{aligned}
$$

De la ecuación (4.64) se puede concluir que el impacto de la tasa de interés del periodo siguiente sobre el consumo de hoy es gobernada por la elasticidad de sustitución del consumo ($\frac{1}{\gamma} = \sigma$), tal como se observó en el caso simplificado.

4.6. Solución del sistema lineal

En el capítulo 1 y 3 se señaló que en la literatura existen varios métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. En el capítulo 3 se ilustró el método de Blanchard y Kahn (1981) y dada la naturaleza del modelo de Longy Plosser (1983) se pudo obtener la solución analíticamente también. En este capítulo se utilizará el método de coeficientes indeterminados de Uhlig (1999) con el fin de tener un panorama de los distintos métodos de solución.

4.6.1. Método de coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados busca que las variables de control estén en función de las variables de estado ($\widehat{k}_t$) y de la variable exógena ($\widehat{a}_t$). Es decir, de la misma forma que el método de Blanchard y Kahn, este método busca la función de política y la función de estado.

Al analizar si cada ecuación log-lineal se encuentra en función del capital ($\widehat{k}_t$) y de la productividad ($\widehat{a}_t$) se observa, en el cuadro [4.5], que la ecuación [2] (función de producción) y la ecuación [3] (demanda de capital que considera la tasa de interés bruta) dependen de dichas variables. Además la ecuación [5] describe la productividad.

Al introducir la demanda de capital en la ecuación de Euler, dicha ecuación estaría en función del capital y de la productividad:

$$\widehat{c}_t = E_t(\widehat{c}_{t+1} - \sigma\lambda_3(\widehat{a}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1})) \tag{4.65}$$

De otro lado, la ley de movimiento del capital contiene a la variable de estado y al choque:

$$\widehat{k}_{t+1} = \lambda_1\widehat{k}_t + \lambda_2\widehat{a}_t + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\widehat{c}_t \tag{4.66}$$

Por tanto, si encontramos el $\widehat{c}_t$ y $\widehat{k}_{t+1}$ en función de ($\widehat{k}_t, \widehat{a}_t$), el sistema estaría solucionado. Para ello, bajo el método de coeficientes indeterminados, se propone la siguiente solución:

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t \tag{4.67}$$

$$\widehat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t \tag{4.68}$$

En este contexto, el problema radica en encontrar los valores de los coeficientes: η_{ck}, η_{ca}, η_{kk}, η_{ka}. Con este fin, el análisis se realizará en cinco pasos:
[1] Ecuación de Euler: al reemplazar la solución propuesta en la ecuación de Euler (4.65) se obtiene una expresión para los coeficientes η_{ca} y η_{ck}:

$$\eta_{ca} = \frac{\eta_{ka}(\sigma\lambda_3 + \eta_{ck}) - \phi\sigma\lambda_3}{1 - \phi} \rightarrow \eta_{ca} = f(\eta_{ka}, \eta_{ck}) \tag{4.69}$$

$$\eta_{ck} = \frac{\eta_{kk}\sigma\lambda_3}{1 - \eta_{kk}} \rightarrow \eta_{ck} = f(\eta_{kk}) \tag{4.70}$$

[2] Ecuación del capital: al reemplazar la solución propuesta en la ecuacion de movimiento del capital (4.66) se obtiene una expresión para los coeficientes η_{kk} y η_{ka}:

$$\eta_{kk} = \lambda_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ck} \rightarrow \eta_{kk} = f(\eta_{ck}) \quad (4.71)$$
$$\eta_{ka} = \lambda_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ca} \rightarrow \eta_{ka} = f(\eta_{ca}) \quad (4.72)$$

[3] Primer coeficiente: para hallar η_{ck} elegimos (4.70) y (4.71):

$\eta_{ck} = f(\eta_{kk})$:

$$\eta_{ck} = \frac{\eta_{kk}\sigma\lambda_3}{1 - \eta_{kk}} \quad (4.73)$$

$\eta_{kk} = f(\eta_{ck})$:

$$\eta_{kk} = \lambda_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ck} \quad (4.74)$$

[4] Encontrando η_{ck}: la ecuación (4.74) se reemplaza en (4.73), de la cual se obtiene:

$$Q_2\eta_{ck}^2 + Q_1\eta_{ck} + Q_0 = 0 \quad (4.75)$$

Donde, en primer lugar las dos raices de esta ecuación representan los dos valores que puede tomar η_{ck}. En segundo lugar, el valor de este coeficiente permite obtener el valor de los tres restantes, y finalmente, los valores de Q_i son:

$$Q_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$$
$$Q_1 = \lambda_1 - 1 + \sigma\lambda_3(1 - \lambda_1 - \lambda_2)$$
$$Q_0 = \lambda_1\sigma\lambda_3$$

Al resolver la ecuación (4.75) se obtiene los dos valores de η_{ck}:

$$\eta_{ck1} = \frac{-Q_1 + \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2}$$
$$\eta_{ck2} = \frac{-Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2}$$

El signo de η_{ck} que se debe de elegir es positivo porque esto permite que η_{kk} sea menor a uno, lo cual indica que la ecuación del capital es estable (no explosiva). Para ello, se evalúa el signo de cada Q_i:

- $Q_2 < 0$ (porque $\lambda_1 > 1$ y $\lambda_2 > 0$)
- $Q_0 > 0$
- $Q_1 > 0$ ($Q_1 = \lambda_1 - 1 + Q_2Q_0/\lambda_1$)

De lo anterior, se demuestra que η_{ck2} tiene signo positivo, por tanto se elige esta raíz. Esto permite obtener los dos coeficientes η_{ck} y η_{kk}:

$$\eta_{ck} = \frac{-Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2} \quad (4.76)$$
$$\eta_{kk} = \lambda_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ck} \quad (4.77)$$

[5] **Coefientes restantes:** para hallar los dos coeficientes restantes η_{ca} y η_{ka} se elige la ecuación (4.69) y (4.72):

$$\begin{aligned}
\eta_{ka} &= \lambda_2 + (1-\lambda_1-\lambda_2)\eta_{ca} \rightarrow \eta_{ka} = f(\eta_{ca}) \\
\eta_{ca} &= \frac{\eta_{ka}(\sigma\lambda_3 + \eta_{ck}) - \phi\sigma\lambda_3}{1-\phi} \rightarrow \eta_{ca} = f(\eta_{ka}, \eta_{ck})
\end{aligned}$$

η_{ka} y η_{ca}:

$$\begin{aligned}
\eta_{ca} &= \frac{-\eta_{ck}\lambda_2 + \sigma\lambda_3(\phi-\lambda_2)}{\phi - 1 + (1-\lambda_1-\lambda_2)(\eta_{ck}+\sigma\lambda_3)} \\
\eta_{ka} &= \lambda_2 + (1-\lambda_1-\lambda_2)\eta_{ca}
\end{aligned}$$

Con los parámetros calibrados para el modelo base se obtiene que: $\eta_{ck} = 0.3253$, $\eta_{ca} = 0.2643$, $\eta_{kk} = 0.9841$ y $\eta_{ka} = 0.0551$. Finalmente, la solución del modelo para cada una de las variables endógenas son:

Solución para el consumo:

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t \tag{4.78}$$

Solución para el capital:

$$\widehat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t \tag{4.79}$$

Solución para el producto:

$$\widehat{y}_t = (1-\alpha)\widehat{k}_t + \alpha\widehat{a}_t \tag{4.80}$$

Solución para la inversión:

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \\
\widehat{i}_t &= \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t)
\end{aligned}$$

Reemplazando (4.78) y (4.80):

$$\widehat{i}_t = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(1-\alpha-\frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})\widehat{k}_t + \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})\widehat{a}_t \tag{4.81}$$

Solución (tasa de interés neta):

$$\widehat{r}_t = \alpha(\widehat{a}_t - \widehat{k}_t) \tag{4.82}$$

Solución (tasa de interés bruta):

$$\widehat{R}_t = \alpha\frac{r_{ss}}{R_{ss}}(\widehat{a}_t - \widehat{k}_t) \tag{4.83}$$

4.6.2. Análisis de elasticidades

Los coeficientes de la solución de cada una de las variables representan elasticidades. Esto se debe a que las variables están expresandas en logaritmos. Por ejemplo para el caso del consumo se tiene:

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t$$

Dado que $\widehat{c}_t = ln(\frac{c_t}{c_{ss}})$ y de manera similar para las demás variables se tiene:

$$
\begin{aligned}
ln(\frac{c_t}{c_{ss}}) &= \eta_{ck} ln(\frac{k_t}{k_{ss}}) + \eta_{ca} ln(\frac{a_t}{a_{ss}}) \\
ln(c_t) - ln(c_{ss}) &= \eta_{ck}(ln(k_t) - ln(k_{ss})) + \eta_{ca}(ln(a_t) - ln(a_{ss})) \\
ln(c_t) &= -[ln(c_{ss}) + ln(k_{ss}) + ln(a_{ss})] + \eta_{ck} ln(k_t) + \eta_{ca} ln(a_t)
\end{aligned}
$$

Tomando diferencial con respecto al capital (k_t) se tiene:

$$
\begin{aligned}
\Delta ln(c_t) &= \eta_{ck} \Delta ln(k_t) \\
\frac{\Delta c_t}{c_t} &= \eta_{ck} \frac{\Delta k_t}{k_t} \\
\frac{\frac{\Delta c_t}{c_t}}{\frac{\Delta k_t}{k_t}} &= \eta_{ck} \\
\text{Elasticidad}_{c_t,k_t} &= \eta_{ck} \qquad (4.84)
\end{aligned}
$$

Como se puede observar la ecuación (4.84), η_{ck} refleja la elasticidad del consumo ante un cambio del capital. En particular, η_{ck} mide el efecto del capital ("k_t") sobre el consumo actual ("c_t"), manteniendo constante la productividad ("a_t"); es decir, si el capital aumenta 1 %, el consumo aumenta en η_{ck} %. De esta forma se lee todos los coeficientes de la solución del sistema log-lineal. El cuadro [4.6] resume las elasticidades.

Cuadro 4.6: Coeficientes (elasticidades) de la solución del modelo lineal

Elasticidad	Expresión	Valor
Elasticidad del consumo al capital: η_{ck}	$\eta_{ck} = \frac{-Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2}$	0.3253
Elasticidad del consumo a la productividad: η_{ca}	$\eta_{ca} = \frac{-\eta_{ck}\lambda_2 + \sigma\lambda_3(\phi - \lambda_2)}{\phi - 1 + (1-\lambda_1-\lambda_2)(\eta_{ck}+\sigma\lambda_3)}$	0.2643
Elasticidad del capital de mañana al capital de hoy: η_{kk}	$\eta_{kk} = \lambda_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ck}$	0.9841
Elasticidad del capital de mañana a la productividad: η_{ka}	$\eta_{ka} = \lambda_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\eta_{ca}$	0.0551

Nota: La expresión de las elasticidades y sus valores están en "Campbell_Lfijo.m" (sección 2).

En el análisis de elasticidades dos parámetros son importantes: la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo σ y la persistencia del choque ϕ. Para ver cómo estos parámetros influyen sobre las elasticidades vamos a revisar cada una de las elasticidades.

Revisando λ_1, λ_2 y λ_3:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (1-\delta)+\delta(1-\alpha)\frac{y_{ss}}{i_{ss}} \\
&= (1-\delta)+\delta(1-\alpha)\left(\frac{1}{\delta}k_{ss}^{-\alpha}\right) \\
&= (1-\delta)+(1-\alpha)\frac{r_{ss}}{1-\alpha} \\
&= (1-\delta)+(\frac{1}{\beta}-(1-\delta)) \\
&= \frac{1}{\beta} \\
\lambda_1 &= F(\beta) \qquad (4.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \delta\alpha\frac{y_{ss}}{i_{ss}} \\
&= \delta\alpha\left(\frac{1}{\delta}k_{ss}^{-\alpha}\right) \\
&= \alpha\ \frac{r_{ss}}{1-\alpha} \\
&= \frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{1}{\beta}-(1-\delta)) \\
\lambda_2 &= F(\alpha,\beta,\delta) \qquad (4.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \alpha\frac{r_{ss}}{R_{ss}} \\
&= \alpha\frac{\frac{1}{\beta}-(1-\delta)}{\frac{1}{\beta}} \\
&= \alpha(1-\beta(1-\delta) \\
\lambda_3 &= F(\alpha,\beta,\delta) \qquad (4.87)
\end{aligned}$$

Revisando Q_0, Q_1 y Q_2:

$$\begin{aligned}
Q_2 &= 1-\lambda_1-\lambda_2 \\
&= 1-(\frac{1}{\beta})-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{1}{\beta}-(1-\delta)) \\
&= -\left[\frac{\frac{1}{\beta}+\alpha\delta-1}{1-\alpha}\right] \\
Q_2 &= F(\alpha,\beta,\delta) \qquad (4.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \lambda_1-1+\sigma\lambda_3(1-\lambda_1-\lambda_2) \\
&= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)}-1+\sigma\underbrace{\lambda_3(1-\lambda_1-\lambda_2)}_{F(\alpha,\beta,\delta)} \\
Q_1 &= F(\sigma^{(+)}\alpha,\beta,\delta) \qquad (4.89)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_0 &= \lambda_1 \sigma \lambda_3 \\ &= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)} \sigma \underbrace{\lambda_3}_{F(\alpha,\beta,\delta)} \\ Q_0 &= F(\sigma^{(+)}\alpha, \beta, \delta) \end{aligned} \tag{4.90}$$

¿De qué parámetros dependen las elasticidades (η_{ck} y η_{kk})?

Debido a que Q_2 es negativo, el componente dentro del radical es positivo. En ese caso σ, que afecta positivamente a Q_0 y Q_1, tiene un impacto positivo sobre η_{ck}. De otro lado, Q_1 que se encuentra fuera del radical también traslada el efecto positivo de σ sobre η_{ck}. Cabe mencionar que η_{ck} no depende de la persistencia del choque (ϕ).

$$\eta_{ck} = \frac{-Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 4Q_2Q_0}}{2Q_2} = F(\sigma^{(+)}\alpha, \beta, \delta) \tag{4.91}$$

De lo anterior se concluye la siguiente observación:
Observación 1: η_{ck} se incrementa a medida que se incrementa la elasticidad de sustitución del consumo (σ).

De otro lado, al analizar el coeficiente η_{kk} se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \eta_{kk} &= \lambda_1 + (1-\lambda_1-\lambda_2)\eta_{ck} \\ &= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)} + \underbrace{(1-\lambda_1-\lambda_2)}_{=-\delta\frac{c_{ss}}{i_{ss}}} \underbrace{\eta_{ck}}_{F(\sigma^{(+)}\alpha,\beta,\delta)} \\ &= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)} - \delta\frac{c_{ss}}{i_{ss}} \underbrace{\eta_{ck}}_{F(\sigma^{(+)}\alpha,\beta,\delta)} \\ &= \underbrace{\lambda_1}_{F(\beta)} - \underbrace{\delta\frac{c_{ss}}{i_{ss}}}_{F(\alpha,\beta,\delta)} \underbrace{\eta_{ck}}_{F(\sigma^{(+)}\alpha,\beta,\delta)} \\ \eta_{kk} &= F(\sigma^{(-)}\alpha, \beta, \delta) \end{aligned} \tag{4.92}$$

De la ecuación (4.92) se concluye las siguientes observaciones:
Observación 2: η_{ck} y η_{kk} no dependen de ϕ.
Observación 3: η_{kk} se reduce a medida que se incrementa la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo (σ).

¿De qué parámetros dependen las elasticidades (η_{ca} y η_{ka})?

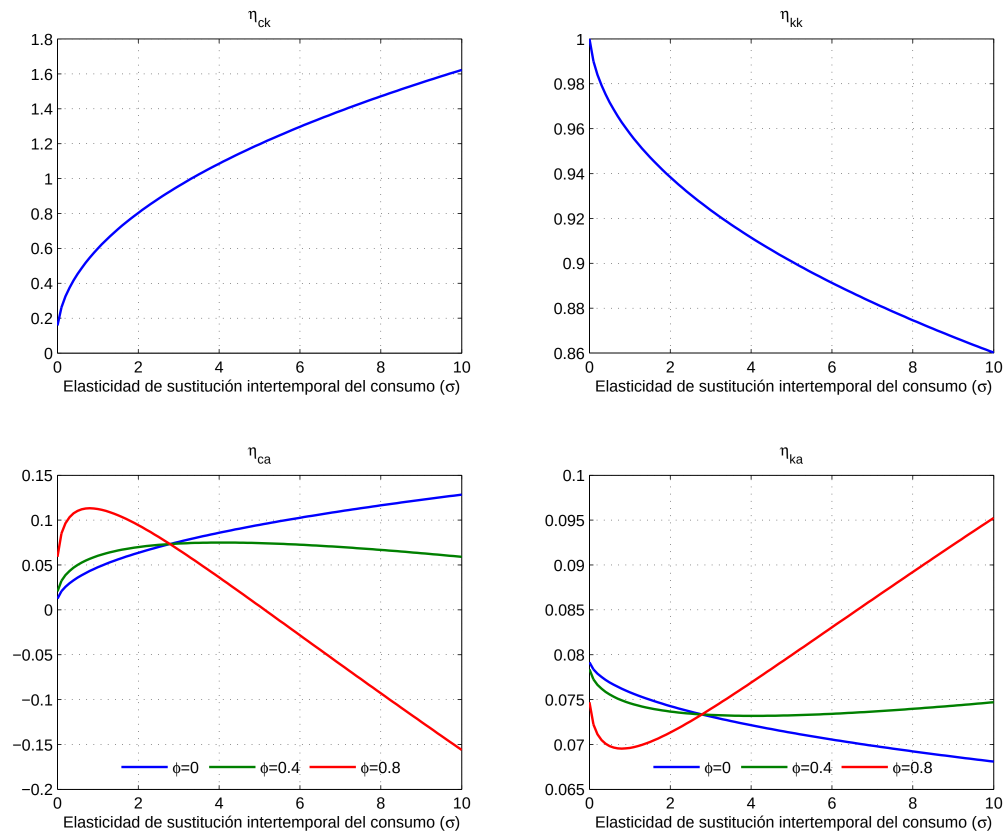
$$\eta_{ca} = \frac{-\eta_{ck}\lambda_2 + \sigma\lambda_3(\phi - \lambda_2)}{\phi - 1 + (1-\lambda_1-\lambda_2)(\eta_{ck} + \sigma\lambda_3)} = F(\phi, \sigma, \alpha, \beta, \delta) \tag{4.93}$$

$$\eta_{ka} = \lambda_2 + (1-\lambda_1-\lambda_2)\eta_{ca} = F(\phi, \sigma, \alpha, \beta, \delta) \tag{4.94}$$

De la expresión (4.94) se puede ver que η_{ca} tiene una relación no lineal con ϕ y σ. De manera similar para η_{ka}. De lo anterior se concluye las siguientes observaciones:

Observación 4: η_{ca} se incrementa a medida que ϕ aumenta para valores bajos de σ ($\sigma \leqslant 1$), pero se reduce para valores altos ($\sigma > 1$).
Observación 5: η_{kk} y η_{ka} se reducen a medida que se incrementa la elasticidad de sustitución del consumo (σ).

Figura 4.2: Elasticidades (coeficientes de la solución)



Nota: Cabe mencionar que estos gráficos se obtienen del código "Campbell_Lfijo_Sim_Parametros.m"

En el cuadro [4.7] se mencionan tres casos de especial interés.

Cuadro 4.7: Casos especiales

Caso	Valor de σ	Función de utilidad	Elasticidad	Serie de tiempo
Caso 1	$\sigma = 0$	No existe efecto sustitución intertemporal	$\eta_{kk} = 1$	$ln(c_t)$ es un *random walk*, y $ln(k_t)$ y $ln(k_t)$ cointegran con el $ln(c_t)$
Caso 2	$\sigma = 1$	Función de utilidad logaritmica: $u(c_t) = ln(c_t)$		El efecto sustitución y el efecto ingreso se anulan.
Caso 3	$\sigma = \infty$	Función de utilidad lineal: $u(c_t) = c_t$	$\eta_{kk} = 0$, $\eta_{ka} = \phi$	k_t se comporta como un AR(1), mientras c_t y y_t se comportan como un ARMA(1,1)

4.7. Representación de series de tiempo

Debido a que se tiene la solución del modelo; es decir, cada variable endógena en función de la variable de estado (capital) y de la variable exógena (productividad), considerando además que la productividad se comporta como un proceso AR(1), entonces se puede hallar la representación de series de tiempo ARMA (p,q) de cada variable.

4.7.1. Serie de tiempo del capital

De la solución del modelo, en particular de la ecuación que describe el comportamiento del capital en $t+1$ en función del capital en t y de la productividad se tiene:

$$\widehat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t$$

Donde los coeficientes η_{kk} y η_{ka} han sido hallados previamente. De esta ecuación se puede encontrar la forma autorregresiva del capital ($\widehat{k}_{t+1}$):

$$\begin{aligned} (1-\eta_{kk}L)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\widehat{a}_t \\ \widehat{k}_{t+1} &= \frac{\eta_{ka}}{1-\eta_{kk}L}\widehat{a}_t \end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\text{Además,} \quad \widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$$

Considerando que $\widehat{a}_t$ se puede expresar como:

$$a_t = \frac{\epsilon_t}{1-\phi L} \tag{4.96}$$

Entonces se tiene que:

$$\widehat{k}_{t+1} = \frac{\eta_{ka}}{(1-\eta_{kk}L)}\frac{\epsilon_t}{(1-\phi L)} \tag{4.97}$$

La expresión anterior demuestra que el capital se comporta como un AR(2): dos raices reales (ϕ y η_{kk}) y menores a 1 (k_{t+1} es estable). La expresión AR(2) del capital es:

$$\begin{aligned}
\widehat{k}_{t+1} &= \frac{\eta_{ka}}{(1-\eta_{kk}L)}\frac{\epsilon_t}{(1-\phi L)} \\
(1-\eta_{kk}L)(1-\phi L)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\
(1-\eta_{kk}L-\phi L+\eta_{kk}\phi L^2)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\
\widehat{k}_{t+1}-\eta_{kk}\widehat{k}_t-\phi\widehat{k}_t+\eta_{kk}\phi\widehat{k}_{t-1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= (\phi+\eta_{kk})\widehat{k}_t-\eta_{kk}\phi\widehat{k}_{t-1}+\eta_{ka}\epsilon_t \qquad (4.98)
\end{aligned}$$

4.7.2. Serie de tiempo del producto

De igual manera que en el caso del capital, para encontrar la expresión de series de tiempo del producto se parte de la solución del modelo:

$$\widehat{y}_t = \alpha\widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t \qquad (4.99)$$

Para encontrar el modelo de series de tiempo del producto (y_t) se reemplaza en la ecuación previa (4.98) la expresión de la productividad (en función del error) y la expresión del capital (en función de la productividad). Esta última corresponde a la ecuación (4.96).

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \alpha\widehat{a}_t + (1-\alpha)\widehat{k}_t \\
\widehat{y}_t &= \alpha\frac{e_t}{1-\phi L} + (1-\alpha)\frac{\eta_{ka}}{(1-\eta_{kk}L)}\widehat{a}_{t-1} \\
\widehat{y}_t &= \alpha\frac{e_t}{1-\phi L} + (1-\alpha)\frac{\eta_{ka}}{(1-\eta_{kk}L)}\frac{e_{t-1}}{(1-\phi L)} \\
\widehat{y}_t &= \alpha\frac{e_t}{1-\phi L} + (1-\alpha)\frac{\eta_{ka}L}{(1-\eta_{kk}L)}\frac{e_t}{(1-\phi L)} \qquad (4.100)
\end{aligned}$$

La ecuación (4.100) sugiere que el producto se comporta como un ARMA(2,1):

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \left[\frac{\alpha+[(1-\alpha)\eta_{ka}-\alpha\eta_{kk}]L}{(1-\eta_{kk}L)(1-\phi L)}\right]\epsilon_t \qquad (4.101) \\
(1-\eta_{kk}L)(1-\phi L)\widehat{y}_t &= \left[\alpha+[(1-\alpha)\eta_{ka}-\alpha\eta_{kk}]L\right]\epsilon_t \\
(1-\eta_{kk}L-\phi L+\eta_{kk}\phi L^2)\widehat{y}_t &= \alpha\epsilon_t+[(1-\alpha)\eta_{ka}-\alpha\eta_{kk}]\epsilon_{t-1} \\
\widehat{y}_t-\eta_{kk}\widehat{y}_{t-1}-\phi\widehat{y}_{t-1}+\eta_{kk}\phi\widehat{y}_{t-2} &= \alpha\epsilon_t+[(1-\alpha)\eta_{ka}-\alpha\eta_{kk}]\epsilon_{t-1} \\
\widehat{y}_t &= \underbrace{(\eta_{kk}+\phi)\widehat{y}_{t-1}-\eta_{kk}\phi\widehat{y}_{t-2}}_{AR(2)}+\underbrace{\alpha\epsilon_t+[(1-\alpha)\eta_{ka}-\alpha\eta_{kk}]\epsilon_{t-1}}_{MA(1)}
\end{aligned}$$

4.7.3. Serie de tiempo del consumo

De la solución del modelo:

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t$$

El consumo se comporta como un ARMA(2,1)

$$\widehat{c}_t = \left[\frac{\eta_{ca}+(\eta_{ck}\eta_{ka}-\eta_{ca}\eta_{kk})L}{(1-\eta_{kk}L)(1-\phi L)}\right]\epsilon_t \qquad (4.102)$$

4.7.4. Serie de tiempo de la tasa de interés real bruta

De la solución del modelo:

$$\widehat{R}_{t+1} = \lambda_3(\widehat{a}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1})$$

La tasa de interés se comporta como un ARMA(2,1)

$$\widehat{R}_{t+1} = \lambda_3 \left[\frac{(1 - \eta_{ka} - \eta_{kk} L)}{(1 - \eta_{kk} L)(1 - \phi L)} \right] \epsilon_t \tag{4.103}$$

4.7.5. Serie de tiempo de la inversión

De la solución para la inversión (ecuación (4.81)):

$$\begin{aligned}
\widehat{i}_t &= \underbrace{(1 - \alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})}_{\eta_{ik}} \widehat{k}_t + \underbrace{(\alpha - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})}_{\eta_{ia}} \widehat{a}_t \\
\widehat{i}_t &= \eta_{ik}\widehat{k}_t + \eta_{ia}\widehat{a}_t \\
\widehat{i}_t &= \eta_{ik}\frac{\eta_{ka}}{(1 - \eta_{kk}L)} \frac{\epsilon_{t-1}}{(1 - \phi L)} + \eta_{ia}\frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\
\widehat{i}_t &= \left[\eta_{ik}\frac{\eta_{ka}L}{(1 - \eta_{kk}L)} + \eta_{ia} \right] \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\
\widehat{i}_t &= \left[\frac{\eta_{ik}\eta_{ka}L + \eta_{ia}(1 - \eta_{kk}L)}{(1 - \eta_{kk}L)} \right] \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\
\widehat{i}_t &= \left[\frac{\eta_{ia} + (\eta_{ik}\eta_{ka} - \eta_{ia}\eta_{kk})L}{(1 - \eta_{kk}L)} \right] \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L}
\end{aligned}$$

Por tanto, la inversión se comporta como un ARMA(2,1):

$$\widehat{i}_t = \left[\frac{\eta_{ia} + (\eta_{ik}\eta_{ka} - \eta_{ia}\eta_{kk})L}{(1 - \eta_{kk}L)(1 - \phi L)} \right] \epsilon_t \tag{4.104}$$

4.8. Funciones impulso-respuesta

La construcción de la función impulso-respuesta de las variables endógenas requiere de dos etapas. En la primera etapa se transforma la forma autorregresiva del capital AR(2) a su versión de media móviles MA(∞). En la segunda etapa se cuantifica el impacto, en cada periodo, de un choque temporal (de un solo periodo) en cada variable endógena.

Primera etapa: se obtiene la forma MA(∞) del capital.

$$\begin{aligned}
\widehat{k}_{t+1} &= (\underbrace{\phi + \eta_{kk}}_{\phi_1})\widehat{k}_t + \underbrace{-\eta_{kk}\phi}_{\phi_2} \widehat{k}_{t-1} + \eta_{ka}\epsilon_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= \phi_1\widehat{k}_{t-1} + \phi_2\widehat{k}_t + \eta_{ka}\epsilon_t \\
(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t
\end{aligned}$$

Calculando las raices del AR(2):

$$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$$

En factores:

$$(L - y_1)(L - y_2) = 0$$

Factorizando y_1 del primer factor e y_2 del segundo:

$$y_1\left(\frac{1}{y_1}L - 1\right)y_2\left(\frac{1}{y_2}L - 1\right) = 0$$

La expresión se reduce a:

$$\left(\underbrace{\frac{1}{y_1}}_{\theta_1} L - 1\right)\left(\underbrace{\frac{1}{y_2}}_{\theta_2} L - 1\right) = 0$$

Multiplicando por (-) a ambos términos:

$$(1 - \theta_1 L)(1 - \theta_2 L) = 0$$

Por tanto: equivalencia de raices

$$(L - y_1)(L - y_2) = (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_2 L) = 0$$

Donde:

- $\theta_1 = \frac{1}{y_1}$
- $\theta_2 = \frac{1}{y_2}$

Utilizando la equivalencia de raices del AR(2):

$$\begin{aligned} (L - y_1)(L - y_2)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\ (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_2 L)\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t \\ \widehat{k}_{t+1} &= \underbrace{\frac{1}{(1 - \theta_1 L)(1 - \theta_2 L)}}_{\Psi(L)}\eta_{ka}\epsilon_t \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Psi(L) &= 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + ... + \psi_k L^k + ... \\ \psi_k &= = \sum_{j=0}^{k} \theta_1^j \theta_2^{k-j} \end{aligned}$$

Versión MA(∞) del capital:

$$\widehat{k}_{t+1} = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + ...)\eta_{ka}\epsilon_t \tag{4.105}$$

Con esta expresión calculamos la función impulso-respuesta. La versión extendida de la ecuación (4.105) es:

$$\begin{aligned}\widehat{k}_{t+1} &= (1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\psi_3 L^3+...)\eta_{ka}\epsilon_t \\ \widehat{k}_{t+1} &= \eta_{ka}\epsilon_t+(\psi_1\eta_{ka})\epsilon_{t-1}+(\psi_2\eta_{ka})\epsilon_{t-2}+(\psi_3\eta_{ka})\epsilon_{t-3}+... \end{aligned} \quad (4.106)$$

Segunda etapa: en esta etapa se calcula la función impulso-respuesta del capital ante un choque de productividad. En este caso para el cálculo de la función impulso respuesta del capital se considera que el impulso o choque ϵ_t se realiza en un solo periodo (el periodo uno) y que toma el valor de una desviación estándar σ_ϵ, el cual se asume que es igual a uno; es decir, en $t=1$, $\epsilon_1=\sigma_\epsilon=1$. El error ($\epsilon_t$) tomar el valor de cero durante los periodos antes del choque y después del choque. El cuadro [4.8] muestra la construcción de la función impulso-respuesta del capital.

Cuadro 4.8: Construcción de la función impulso-respuesta del capital

t	ϵ_t	Versión MA(∞) de $\widehat{k}_{t+1}$	IFR de $\widehat{k}_{t+1}$
0	$\epsilon_0=0$	$\widehat{k}_1=\eta_{ka}\underbrace{\epsilon_0}_{=0}+(\psi_1\eta_{ka})\underbrace{\epsilon_{-1}}_{=0}+...$	$\widehat{k}_1=\eta_{ka}\epsilon_0$
1	$\epsilon_1=1$	$\widehat{k}_2=\eta_{ka}\underbrace{\epsilon_1}_{=1}+(\psi_1\eta_{ka})\underbrace{\epsilon_0}_{=0}+...$	$\widehat{k}_2=\eta_{ka}\epsilon_1$
2	$\epsilon_2=0$	$\widehat{k}_3=\eta_{ka}\underbrace{\epsilon_2}_{=0}+(\psi_1\eta_{ka})\underbrace{\epsilon_1}_{=1}+(\psi_2\eta_{ka})\underbrace{\epsilon_0}_{=0}+...$	$\widehat{k}_3=\psi_1\eta_{ka}\epsilon_1$
3	$\epsilon_3=0$	$\widehat{k}_4=\eta_{ka}\underbrace{\epsilon_3}_{=0}+(\psi_1\eta_{ka})\underbrace{\epsilon_2}_{=0}+(\psi_2\eta_{ka})\underbrace{\epsilon_1}_{=1}+(\psi_3\eta_{ka})\underbrace{\epsilon_0}_{=0}+...$	$\widehat{k}_4=\psi_2\eta_{ka}\epsilon_1$
4	$\epsilon_4=0$	...	$\widehat{k}_5=\psi_3\eta_{ka}\epsilon_1$

En $t=0$ todas las variables se encuentran en su estado estacionario. El capital en $t=1$, el cual se determina en $t=0$, también se encuentra en estado estacionario. Tal es así que se cumple la ley de movimiento del capital: $k_1=(1-\delta)k_0+i_0$, donde $k_1=k_0=k_{ss}$. El choque de productividad se realiza en el periodo $t=1$ produciendo los siguientes efectos:

1er Efecto (sobre las empresas): un incremento de la productividad produce un incremento en la función de producción para cada nivel de capital. El capital se hace más productivo en $t=1$; es decir, con el mismo capital se puede producir más. Por tanto, la demanda de capital aumenta.

2do Efecto (sobre las empresas): el aumento de la demanda de capital permite que la tasa de interés en $t=1$ se incremente: $\uparrow r_t(r_0 \longrightarrow r_1), \quad r_1>r_0$. Esto se debe a que la oferta de capital en $t=1$ se mantiene constante ya que no se ve afectada por el choque de productividad.

3er Efecto (sobre las familias): el incremento de la tasa de interés real produce un **efecto ingreso** sobre el consumo:

$$\uparrow r_t(r_1>r_0)\longrightarrow r_1k_1>r_0k_0\longrightarrow\uparrow c_1$$

Figura 4.3: Efecto sobre la función de producción

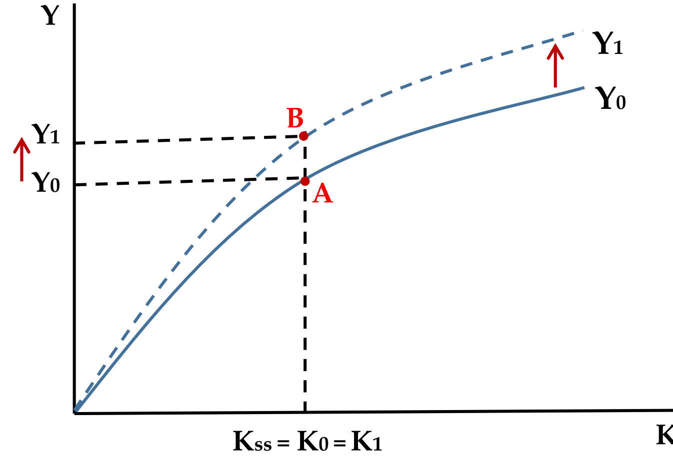
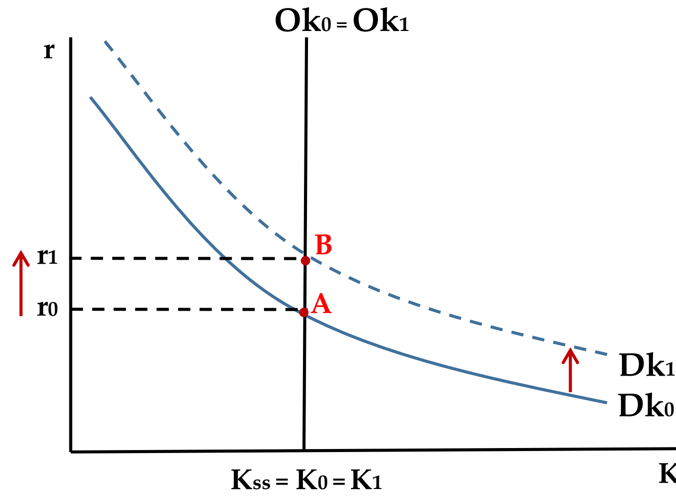


Figura 4.4: Efecto sobre la demanda de capital



4to Efecto (sobre las familias): el incremento de la tasa de interés incentiva el ahorro, el cual en economía cerrada es igual a la inversión. Entonces la inversión pasa de i_0 a i_1 ($i_1 > i_0$). El impacto de una mayor inversión se observa en el incremento de la oferta de capital en el siguiente periodo ($t = 2$)

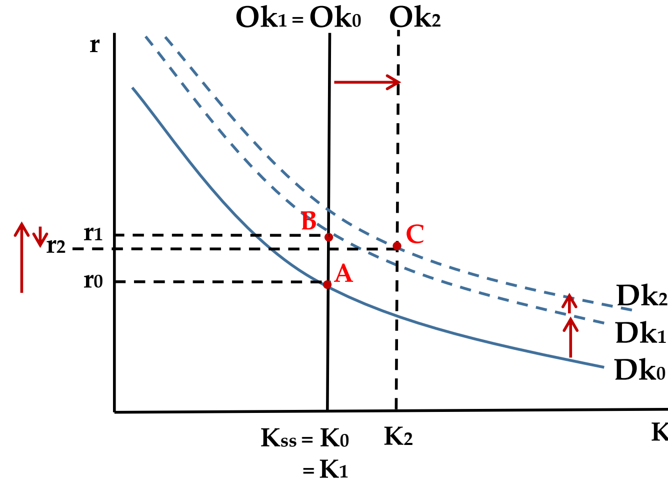
$$k_2 = (1 - \delta)k_1 + i_1$$

Por tanto:

$$i_1 > i_0 \longrightarrow k_2 > k_1$$

5to Efecto (sobre las empresas y las familias): como el impacto del choque de productividad tiene persistencia; es decir, sus efectos son positivos aunque cada vez menores en el tiempo. En $t = 2$ la función de producción se incrementa generando que la demanda de capital también se incremente, pero en menor magnitud que lo observado en $t = 1$. Esto produce que la tasa de interés real en $t = 2$ sea menor que en $t = 1$ ($r_2 < r_1$); sin embargo, sigue siendo mayor que el valor en $t = 0$. Entonces dado que el individuo compara su

Figura 4.5: Efecto sobre la oferta y demanda de capital



Cuadro 4.9: Valores de la función impulso-respuesta (variales log-lineales)

t	$\widehat{y}_t$	$\widehat{k}_{t+1}$	$\widehat{c}_t$	$\widehat{i}_t$	$\widehat{R}_t$	$\widehat{a}_t$
0	0	0	0	0	0	0
1	0.667	0.05512	0.26429	2.20468	0.02636	1
2	0.652	0.10660	0.26901	2.11441	0.02359	0.95
3	0.63747	0.15464	0.27321	2.02834	0.02098	0.9025
4	0.62337	0.19943	0.27691	1.94626	0.01852	0.85738
.	.	.	.	.	.	.

Nota: Debido a que el choque se realiza en el primer periodo ($t = 1$), el valor de las variables en $t = 0$ es cero. Cabe mencionar que estos valores se obtienen del código "Campbell_Lfijo.m (sección 4)"

situación en cada periodo con respecto a $t = 0$ (estado estacionario), entonces esta mayor tasa de interés ($r_2 > r_0$) produce dos efectos sobre el consumo:

$$r_2 > r_0 : \text{Efecto sustitución} \longrightarrow \downarrow c_1 \quad \uparrow c_2$$

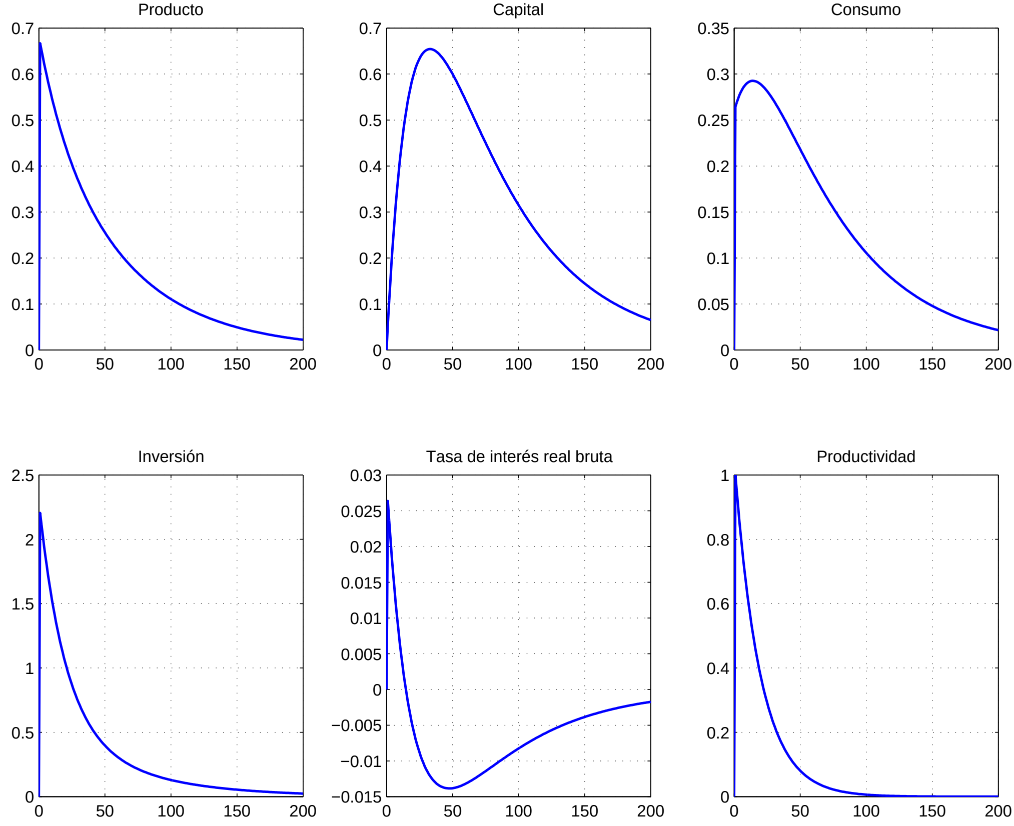
$$r_2 > r_0 : \text{Efecto ingreso} \longrightarrow r_2 k_2 > r_1 k_1 \longrightarrow \uparrow c_2$$

Por tanto el efecto final de la tasa de interés sobre el consumo, para σ pequeño, es:

$$\text{EI} > |\text{ES}| \longrightarrow \uparrow c_1 \quad \uparrow c_2$$

El cuadro [4.9] muestra los valores de la función impulso-respuesta de las variables endógenas del modelo. Para leer correctamente estos valores se debe de recordar que estas funciones corresponden a las variables log-lineales, las cuales por ejemplo para el producto está expresada de la siguiente manera: $\widehat{y}_t = ln(y_t) - ln(y_{ss})$ o en su forma reducida $\widehat{y}_t = ln\left[\frac{y_t}{y_{ss}}\right]$.

Figura 4.6: Función impulso-respuesta de las variables macroeconómicas log-lineales



Nota: Estas funciones impulso-respuesta corresponde a las variables log-lineales; es decir a $\widehat{y}_t$, $\widehat{k}_t$, $\widehat{c}_t$, $\widehat{i}_t$, $\widehat{r}_t$ y $\widehat{a}_t$. Cabe mencionar que estos gráficos se obtienen del código "Campbell_Lfijo.m (sección 4)."

En línea con lo anterior, según el cuadro [4.9] el valor del producto (log-lineal) en $t = 0$ es igual a cero. Es decir, $\widehat{y}_0 = ln\left[\frac{y_0}{y_{ss}}\right] = 0$. La única solución para esta expresión es que $\frac{y_0}{y_{ss}} = 1$, lo cual conlleva a que $y_0 = y_{ss}$. Esto quiere decir que cuando la variable log-lineal $\widehat{y}_t$ se encuentra en el valor cero, esto significa que la variable en niveles y_t se encuentra en su estado estacionario.

De otro lado, en $t = 1$ el valor del producto (log-lineal) es igual a 0.667, en el cual se cumple: $\widehat{y}_1 = 0.667 = ln\left[\frac{y_1}{y_{ss}}\right]$. Resolviendo la segunda igualdad se tiene que $\frac{y_1}{y_{ss}} = e^{0.667} \approx 1 + 0.667$. Por tanto, $\frac{y_1}{y_{ss}} = 1 + 0.667$, lo cual conlleva finalmente a $y_1 = (1 + 0.667)y_{ss}$.

$$\text{En } t = 1 \mapsto \underbrace{\widehat{y}_1 = 0.667}_{\text{variable log-lineal}} \mapsto \underbrace{y_1 = (1 + 0.667)y_{ss}}_{\text{variable en niveles}}$$

Por tanto, el valor (0.667) de la función impulso respuesta en $t = 1$ significa que la variable producto en niveles (y_1) está 66.7 % por encima de su nivel de estado estacionario (y_{ss}).

En la figura [4.6] y el cuadro [4.9] se puede observar lo siguiente:

1. En $t = 0$ (antes de choque) todas las variables permanecen en su estado estacionario. Por tanto, las variables log-lineales en $t = 0$ son iguales a cero ($\widehat{x}_{ss} = ln\left(\frac{x_{ss}}{x_{ss}}\right) = ln(1) = 0$).

2. En el periodo del choque ($t = 1$), ϵ_1 toma el valor de su desviación estándar, en este caso igual a 1.

3. El primer efecto del choque de productividad es un incremento en la función de producción, la cual incrementa de productividad marginal del capital $PMgk_t$; es decir, la demanda del capital en "t" (D_k).

4. El incremento de la demanda de capital aumenta la tasa de interés de hoy ($\widehat{R}_t$). Esto se debe a que la oferta del capital es perfectamente inelástica (vertical) porque es fijada en el periodo anterior $\widehat{k}_t$.

5. $\uparrow \widehat{R}_t \rightarrow$ produce un Efecto Ingreso (EI): $\uparrow (\widehat{R}_t\widehat{k}_t)$

6. El efecto ingreso incrementa el c_t y i_t

7. $\uparrow i_t$ expande k_{t+1} (oferta del capital de "t+1").

8. Lo anterior produce una caída de la tasa de interés en "t+1" ($\downarrow r_{t+1}$), pero aún está por encima de su estado estacionario; es decir, es más alta que la tasa de interés antes del choque $\widehat{R}_0$, lo cuál incentiva a la familia trasladar consumo de hoy "t" hacia mañana "$t + 1$". Es decir, existe un efecto sustitución que es gobernado por la elasticidad de sustitución del consumo. Para poder ver esta relación revisemos la ecuación de Euler log-lineal:

$$\widehat{c}_t = E_t\left[\widehat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma}\widehat{R}_{t+1}\right]$$

   Aquí se puede observar que si la tasa de interés de $t+1$ se incrementa en 1 % entonces el consumo hoy "t" se reduce en $\frac{1}{\gamma}$ (elasticidad de sustitución del consumo). Todo ello es el efecto sustitución que produce la tasa de interés.

9. $\downarrow \widehat{R}_{t+1}$ (pero por encima del estado estado estacionario) produce dos efectos: Efecto Sustitución (ES) y Efecto Ingreso (EI).

10. Efecto sustitución (de la tasa de interés):

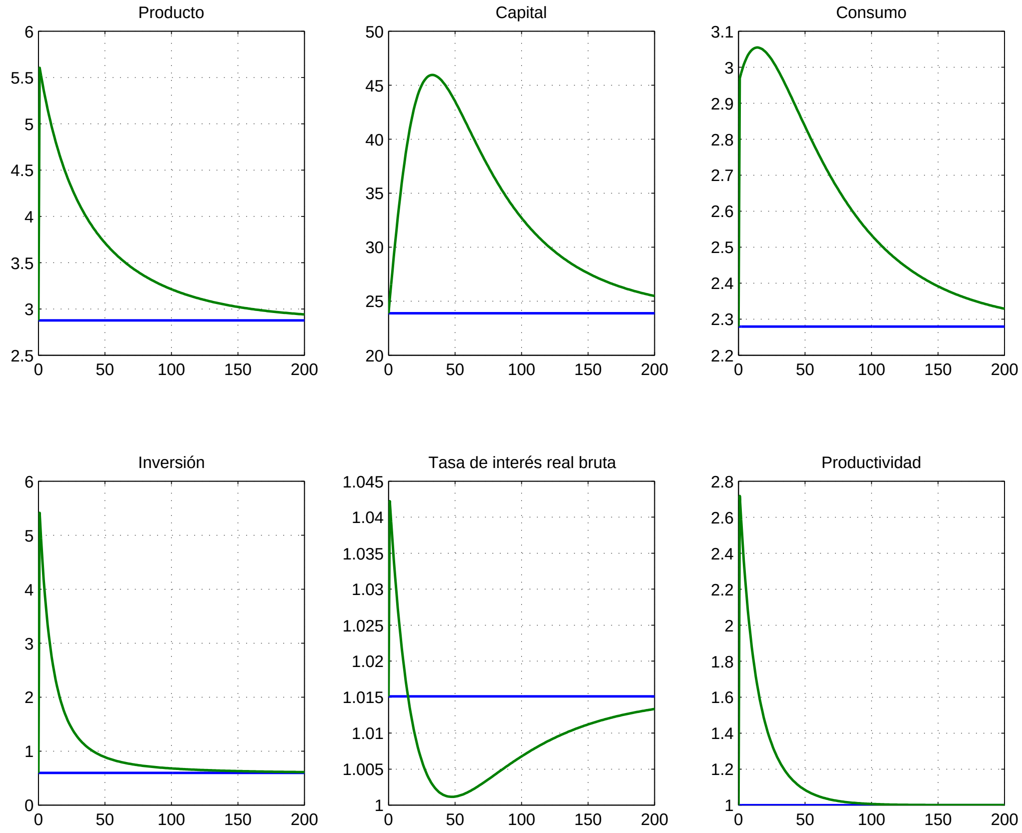
$$\widehat{R}_{t+1} > \widehat{R}_t \rightarrow \downarrow \widehat{c}_t$$

11. Efecto ingreso (de la tasa de interés):

$$\widehat{R}_{t+1} > \widehat{R}_t \rightarrow \uparrow \widehat{c}_{t+1}$$

De la figura [4.7] se puede concluir algunas ideas. La primera conclusión es que el capital es más grande en unidades que cualquier otra variable. Por ejemplo, el valor de estado estacionario del capital es de 23.88 unidades, la cual es mayor en gran medida con respecto a las demás variables (el valor de estado estacionario del producto es de 2.87

Figura 4.7: Función impulso-respuesta de las variables macroeconómicas en niveles



Nota: Estas funciones impulso-respuesta corresponde a las variables en niveles; es decir a y_t, k_t, c_t, i_t, R_t y a_t. Cabe mencionar que esta gráfica se obtienen del código "Campbell_Lfijo.m" (sección 5).

unidades). Para entender por qué el stock de capital en estado estacionario es grande se debe de revisar los parámetros de los cuales depende:

$$k_{ss} = \left[\frac{\frac{1}{\beta} - (1-\delta)}{1-\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Aplicando el signo del exponente se tiene:

$$k_{ss} = \left[\frac{1-\alpha}{\frac{1}{\beta} - (1-\delta)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

Entonces k_{ss} es una función de α, β y δ. En primer lugar, el exponente $\frac{1}{\alpha}$ es mayor a uno porque α es menor a uno $(= 0.667)$, mientras más pequeño sea α más grande será el exponente y mayor será el numerador incrementando el k_{ss}. En segundo lugar, un incremento de la tasa de depreciación reduce k_{ss}, lo cual hace sentido debido a que el capital se consume a una mayor depreciación. Por ejemplo, si el capital se deprecia totalmente $(\delta = 1)$, entonces $k_{ss} = 0.1880$. Finalmente, una mayor tasa de descuento incrementa k_{ss}.

La segunda conclusión es que la inversión es muy pequeña en comparación con el capital. Esto se debe a que en estado estacionario la inversión i_{ss} es igual a una proporción del capital δk_{ss}, es más δ es igual a 2.5 %; es decir, la inversión en estado estacionario (= 0.597) es igual al 2.5 % del capital. Una tercera conlusion es que dado que los valores de la función impulso-respuesta de las variables log-lineales cumplen con la siguiente expresión:

$$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t$$

Entonces se puede obtener una relación entre los niveles de las variables (en la función impulso-respuesta de las variables en niveles):

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \\
ln\left(\frac{y_t}{y_{ss}}\right) &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}ln\left(\frac{c_t}{c_{ss}}\right) + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}ln\left(\frac{i_t}{i_{ss}}\right) \\
ln(y_t) &= (ln(y_t) - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}ln(c_{ss}) - \frac{i_{ss}}{y_{ss}}ln(i_{ss})) + \frac{c_{ss}}{y_{ss}}ln(c_t) + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}ln(i_t) \quad (4.107)
\end{aligned}$$

De la figura [4.8] (gráfica de la derecha) se desprende una conclusión importante: ante un choque de productividad, la inversión reacciona fuertemente superando al producto y al consumo. Es más, la inversión se incrementa un poco más del 200 % del valor de su estado estacionario. Además, las variables demoran más de 100 periodos (trimestres) en volver a su estado estacionario debido a que el choque tiene una alta persistencia ($\phi = 0.95$).

4.9. Simulación de las variables endógenas

Para la simulación del capital usaremos su representación autorregresiva AR(2):

$$\widehat{k}_{t+1} = \phi_1\widehat{k}_t + \phi_2\widehat{k}_{t-1} + \eta_{ka}\epsilon_t$$

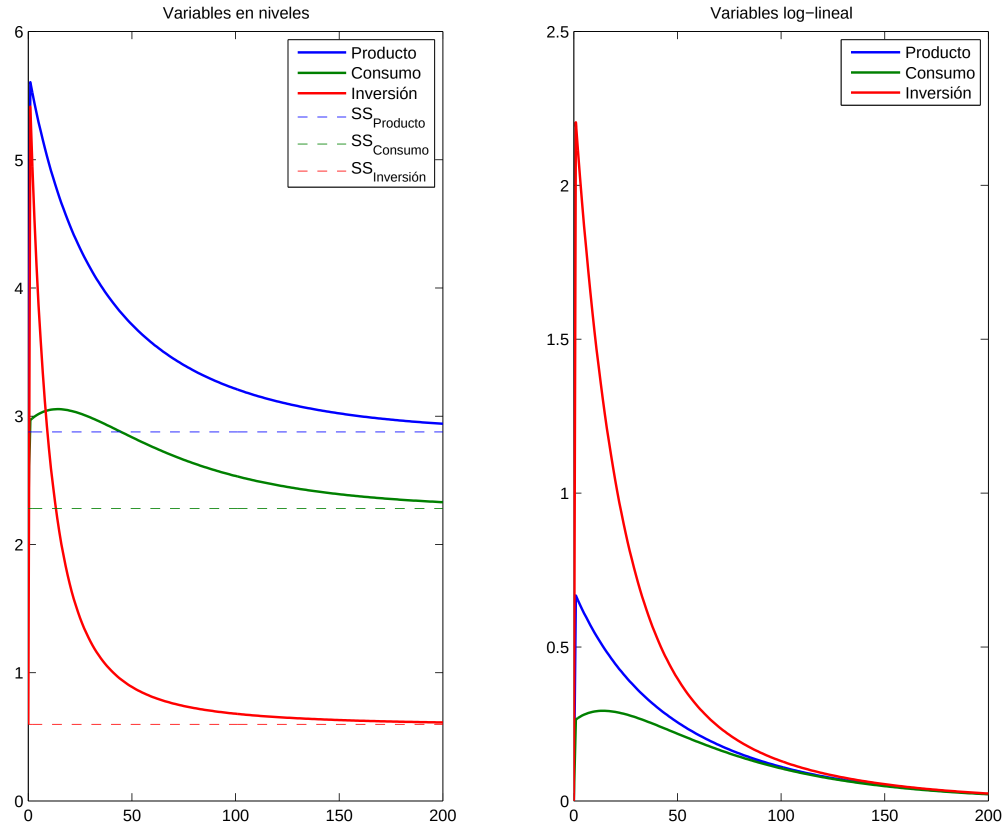
Asumiremos que la variable inicia de su estado estacionario: $\widehat{k}_0 = 0$. Además, se asume que la variable en periodos previos se ha mantenido en *steady state*, entonces: $\widehat{k}_{-1} = 0$.

Cuadro 4.10: Simluación del capital log-lineal

t	ϵ_t	Representación AR(2) del k_{t+1}
0	$\epsilon_0 = 0$ (steady state)	$\widehat{k}_1 = \phi_1\widehat{k}_0 + \phi_2\widehat{k}_{-1} + \eta_{ka}\epsilon_0$
1	$\epsilon_1 =$ valor aleatorio	$\widehat{k}_2 = \phi_1\widehat{k}_1 + \phi_2\widehat{k}_0 + \eta_{ka}\epsilon_1$
2	$\epsilon_2 =$ valor aleatorio	$\widehat{k}_3 = \phi_1\widehat{k}_2 + \phi_2\widehat{k}_1 + \eta_{ka}\epsilon_2$
3	$\epsilon_3 =$ valor aleatorio	$\widehat{k}_4 = \phi_1\widehat{k}_3 + \phi_2\widehat{k}_2 + \eta_{ka}\epsilon_3$
4	$\epsilon_4 =$ valor aleatorio	$\widehat{k}_5 = \phi_1\widehat{k}_4 + \phi_2\widehat{k}_3 + \eta_{ka}\epsilon_4$

Para la simulación de las variables macroeconómicas como el producto, consumo e inversión, primero se necesita la serie simulada de la productividad $\widehat{a}_t$ y del capital $\widehat{k}_t$, las

Figura 4.8: Función impulso-respuesta (comparación de las variables log-lineal vs en niveles)



Nota: Cabe mencionar que esta gráfica se obtiene del código "Campbell_Lfijo.m (sección 5)".

cuales se muestran en el cuadro 4.11. Para esto último se utiliza la solución del sistema de ecuaciones log-lineal:

$$\begin{aligned}\widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon \\ \widehat{k}_{t+1} &= \phi_1\widehat{k}_t + \phi_2\widehat{k}_{t-1} + \eta_{ka}\epsilon_t\end{aligned}$$

Para la simulación de las demás variables macroeconómicas ($\widehat{y}_t$, $\widehat{c}_t$, $\widehat{i}_t$ y $\widehat{R}_t$) se utiliza la solución:

$$\begin{aligned}\widehat{y}_t &= \alpha\widehat{a}_t + (1-\alpha\widehat{k}_t) \\ \widehat{c}_t &= \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t \\ \widehat{i}_t &= \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(1-\alpha-\frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})\widehat{k}_t + \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\alpha-\frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})\widehat{a}_t \\ \widehat{R}_t &= \lambda_3(\widehat{a}_t - \widehat{k}_t)\end{aligned}$$

Donde: $\eta_{ik} = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(1-\alpha-\frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})$ y $\eta_{ia} = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\alpha-\frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})$

Cuadro 4.11: Simulación de la productividad y del capital (log-lineal)

t	ϵ_t	$\widehat{a}_t$	$\widehat{k}_{t+1}$
0	$\epsilon_0 = 0$	$\widehat{a}_0 = 0$	$\widehat{k}_1 = 0$
0	$\epsilon_1 =$ valor aleatorio de una N(0,1)	$\widehat{a}_1 = 0.1832$	$\widehat{k}_2 = 0.0101$
0	$\epsilon_2 =$ valor aleatorio de una N(0,1)	$\widehat{a}_2 = -0.8557$	$\widehat{k}_3 = -0.0372$
0	$\epsilon_3 =$ valor aleatorio de una N(0,1)	$\widehat{a}_3 = 0.1363$	$\widehat{k}_4 = -0.0291$
0	$\epsilon_4 =$ valor aleatorio de una N(0,1)	$\widehat{a}_4 = 0.4366$	$\widehat{k}_5 = -0.0046$
.	.	.	.
.	.	.	.

Cuadro 4.12: Simulación de las variables macroeconómicas log-lineales

t	$\widehat{y}_t$	$\widehat{c}_t$	$\widehat{i}_t$	$\widehat{R}_t$
0	$y_0 = \alpha a_0 + (1 - \alpha k_0)$	$c_0 = \eta_{ck} k_0 + \eta_{ca} a_0$	$i_0 = \eta_{ik} k_0 + \eta_{ia} a_0$	$R_0 = \lambda_3(a_0 - k_0)$
1	$y_1 = \alpha a_1 + (1 - \alpha k_1)$	$c_1 = \eta_{ck} k_1 + \eta_{ca} a_1$	$i_1 = \eta_{ik} k_1 + \eta_{ia} a_1$	$R_1 = \lambda_3(a_1 - k_1)$
2	$y_2 = \alpha a_2 + (1 - \alpha k_2)$	$c_2 = \eta_{ck} k_2 + \eta_{ca} a_2$	$i_2 = \eta_{ik} k_2 + \eta_{ia} a_2$	$R_2 = \lambda_3(a_2 - k_2)$
3	$y_3 = \alpha a_3 + (1 - \alpha k_3)$	$c_3 = \eta_{ck} k_3 + \eta_{ca} a_3$	$i_3 = \eta_{ik} k_3 + \eta_{ia} a_3$	$R_3 = \lambda_3(a_3 - k_3)$
4	$y_4 = \alpha a_4 + (1 - \alpha k_4)$	$c_4 = \eta_{ck} k_4 + \eta_{ca} a_4$	$i_4 = \eta_{ik} k_4 + \eta_{ia} a_4$	$R_4 = \lambda_3(a_4 - k_4)$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

La simulación de las variables pueden tomar valores negativos debido a que se encuentran expresadas en log-desviaciones de su estado estacionario ($ln(\frac{x_t}{x_{ss}})$). El valor negativo de la variable log-lineal significa que la variable en niveles se encuentra por debajo de su estado estacionario. Además, era de esperar que la variable simulada log-lineal tenga valores negativos porque su media es igual a cero. Sin embargo, la variable simulada en niveles tiene solo valores positivos.

4.10. Componente cíclico de las variables simuladas

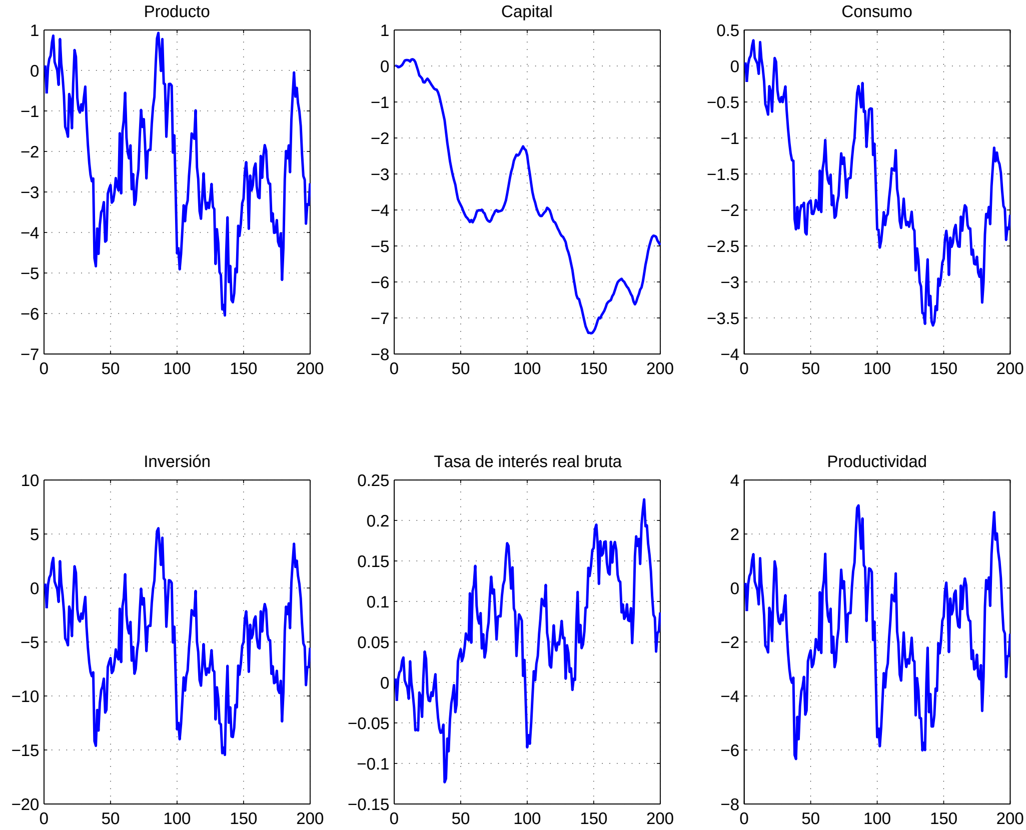
Para hallar el componente cíclico de las variables log-lineales se aplica el filtro Hodrick-Prescott (Filtro HP). Este filtro permite separar la serie en dos componentes: el componente tendencial y el componente cíclico. La figura [4.10] muestra el componente cíclico y tendencial para cada variable simulada.

Lo que nos interesa evaluar del modelo son los momentos del **componente cíclico** de cada variable simulada. Es decir, la varianza, la autocorrelación y la correlación con otras variables.

4.11. Cálculo de los momentos teóricos

Al realizar la simulación del modelo en Matlab, lo que se obtiene son los momentos teóricos para las variables log-lineales. Sin embargo, lo que se necesita es volver a las variables en niveles debido a que los momentos empíricos corresponden a las variables

Figura 4.9: Simulación de las variables macroeconómicas log-lineales



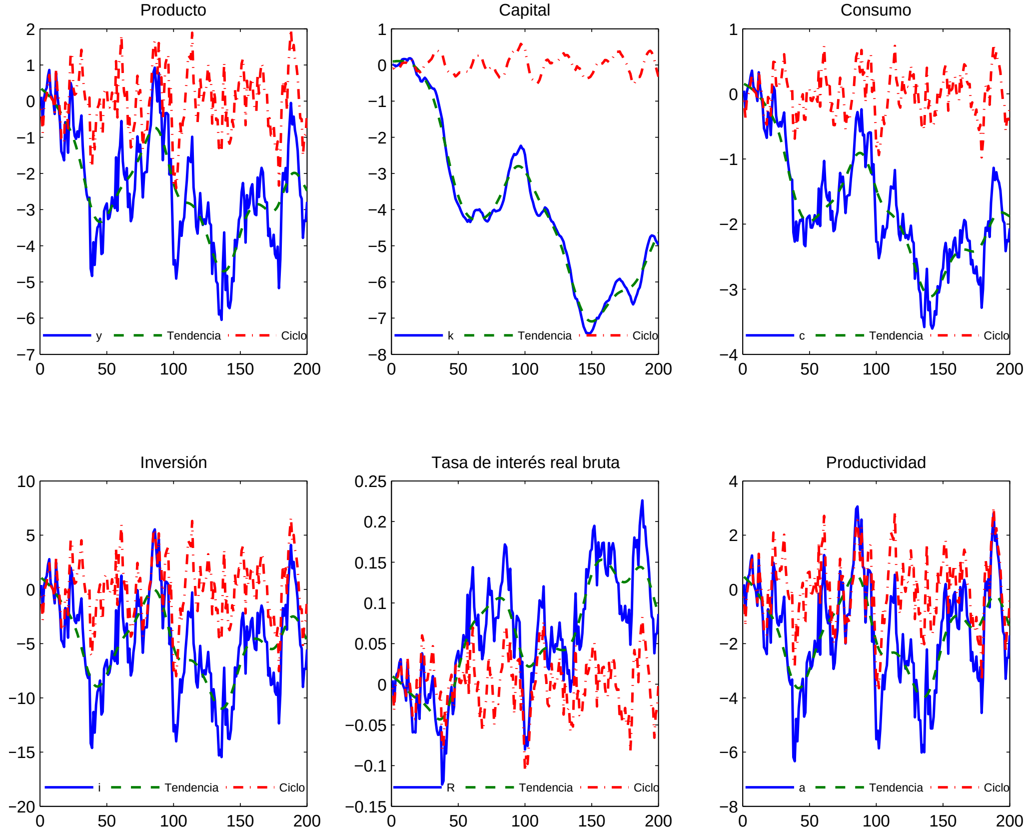
Nota: El capital se comporta como AR(2), mientras que el producto, el consumo, la inversión y la tasa de interés real se comportan como ARMA(2,1). Además, la productividad sigue un proceso AR(1). Este gráfico se obtiene del código "Campbell_Lfijo.m" (sección 6).

en niveles´. Para calcular los momentos teóricos de las variables en niveles se utiliza la relación entre la variable log-lineal y la variable en niveles:

$$\widehat{x}_t = ln\left(\frac{x_t}{x_{ss}}\right) \tag{4.108}$$

Media: la media de la variable log-lineal es cero. Luego de los artificios algrebraicos se concluye la relación (4.109), la cual indica que la media del logaritmo de la variable "x" es igual al logaritmo de la variable en estado estacionario.

Figura 4.10: Aplicación del filtro HP a las variables simuladas



Nota: Debido a que los parámetros calibrados corresponden a datos trimestrales, entonces cada periodo en esta figura se entiende como un trimestre. Esto sugiere que se debe de usar el parámetro de suavizamiento del filtro HP correspondiente a datos trimestrales ($\lambda = 1600$). Este gráfico se obtiene del código "Campbell_Lfijo.m" (sección 7).

$$
\begin{aligned}
\widehat{x}_t &= ln\left(\frac{x_t}{x_{ss}}\right) \\
E\widehat{x}_t &= Eln\left(\frac{x_t}{x_{ss}}\right) \\
\mu_{\widehat{x}_t} &= E(ln(x_t) - ln(x_{ss})) \\
\mu_{\widehat{x}_t} &= E(ln(x_t)) - ln(x_{ss}) \\
\mu_{\widehat{x}_t} &= \mu_{ln(x_t)} - ln(x_{ss}) \\
0 &= \mu_{ln(x_t)} - ln(x_{ss}) \\
\mu_{ln(x_t)} &= ln(x_{ss})
\end{aligned} \tag{4.109}
$$

Varianza: la varianza de la variable log-lineal es igual a la varianza del logarítmo de la variable en niveles (ver la ecuación (4.110)). Por su defecto la desviación estándar de

ambas variables es la misma.

$$\begin{aligned} Var(\widehat{x}_t) &= Var\Big(ln\Big(\frac{x_t}{x_{ss}}\Big)\Big) \\ \text{Por propiedad} &: Var(ax+b) = a^2Var(x) \\ Var(\widehat{x}_t) &= Var\big(ln(x_t) - ln(x_{ss})\big) \\ Var(\widehat{x}_t) &= Var\big(ln(x_t)\big) \\ \sigma^2_{\widehat{x}_t} &= \sigma^2_{ln(x_t)} \end{aligned} \tag{4.110}$$

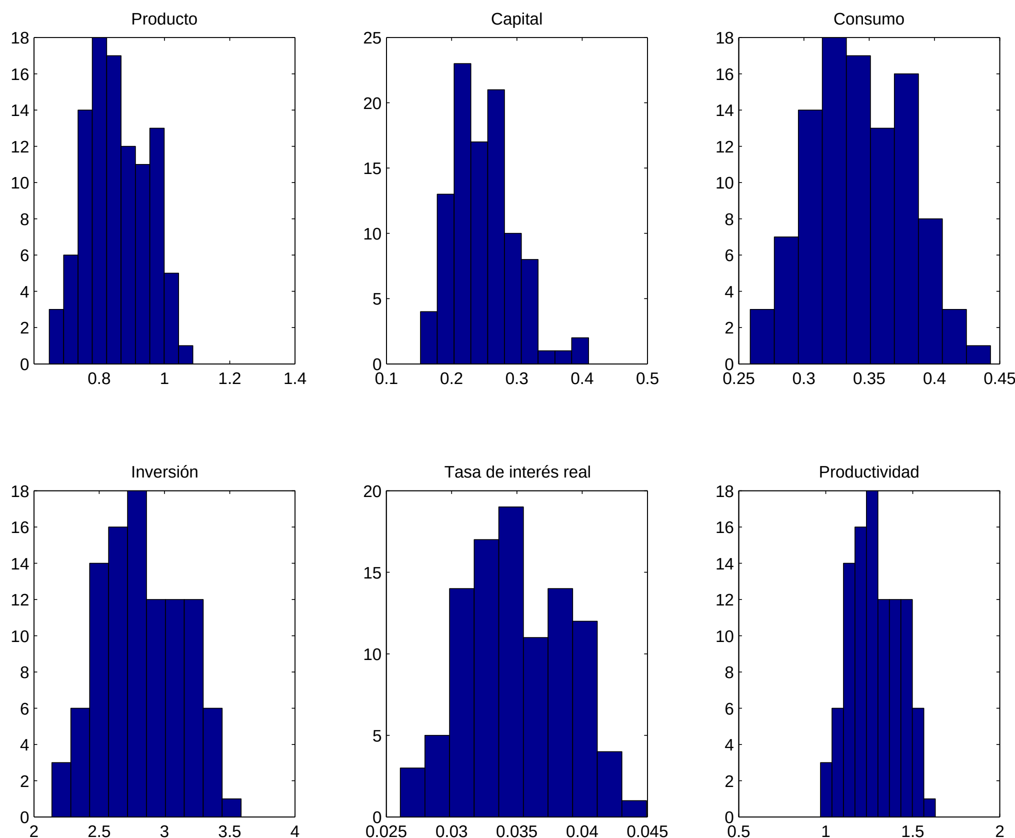
Correlación: la correlación entre dos variables log-lineales es igual a la correlación entre el logaritmo de dichas variables en niveles.

$$\begin{aligned} corr(\widehat{x},\widehat{y}) &= \frac{\sum_{i=1}^{N}(\widehat{x}_i - \mu_{\widehat{x}_i})(\widehat{y}_i - \mu_{\widehat{y}_i})}{\sigma_{\widehat{x}}\sigma_{\widehat{y}}} \\ \text{Pero} &: \mu_{\widehat{x}_i} = 0 \text{ y } \mu_{\widehat{x}_i} = 0 \\ corr(\widehat{x},\widehat{y}) &= \frac{\sum_{i=1}^{N}(\widehat{x}_i)(\widehat{y}_i)}{\sigma_{\widehat{x}}\sigma_{\widehat{y}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}(ln\frac{x_i}{x_{ss}})(ln\frac{y_i}{y_{ss}})}{\sigma_{\widehat{x}}\sigma_{\widehat{y}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}(ln(x_i) - lnx_{ss})(ln(y_i) - lny_{ss})}{\sigma_{\widehat{x}}\sigma_{\widehat{y}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}(ln(x_i) - \mu_{ln(x_t)})(ln(y_i) - \mu_{ln(y_t)})}{\sigma_{ln(x_t)}\sigma_{ln(y_t)}} \\ corr(\widehat{x},\widehat{y}) &= corr(ln(x_t), ln(y_t)) \end{aligned} \tag{4.111}$$

De lo anterior se concluye que los segundos momentos de las variables log-lineales son exactamente iguales a los segundos momentos del logarítmo natural de las variables en niveles. Por tanto, podemos concluir que los segundos momentos del componente cíclico de las variables log-lineales (simuladas) son idénticas a los segundos momentos del componente cíclico del logarítmo de las variables en niveles. Entonces, basta comparar los momentos (del componente cíclico) obtenidos por el modelo (simulación) con los correspondientes obtenidos de los datos (variables en logarítmos).

Para realizar la comparación se hace lo siguiente. En primer lugar se fija el periodo de estudio de las variables macroeconómicas (por ejemplo: 1980.I hasta 2016.III). Este periodo esta compuesto por 147 trimestres. En segundo lugar se realizará 500 simulaciones considerando que cada variable tenga un periodo de 147 trimestres. En tercer lugar, para cada simulación se aplica el filtro HP y se abstrae el componente cíclico. En cuarto lugar, se calcula la media, varianza, autocorrelación de primer orden y correlación del componente cíclico para cada simulación. En quinto lugar, se construye una distribución para la media, la varianza, autocorrelación de primer orden y la correlación. Se elige el valor medio de cada distribución, y ese valor representa el valor de cada segundo momento teórico. Finalmente, dichos valores se comparan con los datos.

Figura 4.11: Distribuciones de la desviación estándar del modelo teórico



Nota: Estas distribuciones se obtiene de simular 100 veces las variables considerando un periodo de 150 trimestres. El valor que se toma de cada distribución es el valor promedio. Este gráfico se obtiene del código "Campbell_Lfijo_Sim_Variables.m" (sección 7).

4.12. Comparación modelo teórico con los datos empiricos

Del cuadro [4.13] se desprende algunas conclusiones. La primera es que los datos sugieren que la volatilidad de la inversión es mayor que el producto y el consumo, tal es así que la desviación estándar de la inversión es 4.8 veces la volatilidad del producto y 6.4 veces la del consumo. Sin embargo, el modelo teórico no captura todas estas relaciones encontrada en los datos. En primer lugar, aunque mantiene que la volatilidad de la inversión es mayor que la del consumo, sobreestima la magnitud (la volatilidad de la inversión es 8.2 veces la del consumo). En segundo lugar, la volatilidad para las tres variables (producto, consumo e inversión) está muy por debajo de lo observado en los datos. De otro lado, una bondad del modelo es que captura la dirección correcta en cuanto a volatilidad (γ): $\gamma_{\text{inversión}} > \gamma_{\text{producto}} > \gamma_{\text{consumo}}$.

Una segunda conclusión es que la correlación temporal del producto con el consumo y la inversión está sobrevaluada por el modelo. No obstante, el modelo se acerca mucho más a la correlación producto-inversión que la correpondiente con el consumo.

Cuadro 4.13: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empiricos

	Datos empíricos USA		Modelo teórico	
Variable	DesEst (%)	Corr. con producto (t)	DesEst (%)	Corr. con producto (t)
Producto	1.72	1	0.85 (0.093)	1
Consumo	1.27	0.83	0.34 (0.0382)	0.9874
Inversión	8.24	0.91	2.82 (0.3065)	0.9972

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de Cooley y Prescott (1995), los cuales han sido calculados bajo el periodo muestral de 1954.I hasta 1991.III. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una simulación de 100 veces considerando un periodo de 150 trimestres. Los valores mostrados en el modelo teórico son los valores promedios de cada distribución. Estos valores se obtiene del código "Campbell_Lfijo_Sim_Variables.m" (sección 8).

4.13. Códigos

La solución del modelo como las funciones impulso-respuesta y la simulación de las variables se ha desarrollado directamente en Matlab (mediante la construcción de varios m-file) y también por medio de Dynare (mediante la construcción de un mod-file). El resultado de ambos caminos es el mismo, la ventaja de construir directamente un m-file es que se puede hacer explícito muchos detalles en la solución y simulación del modelo, los cuales ya están programados en Dynare.

Cuadro 4.14: Códigos en Matlab y Dynare

Códigos	Descripción
Matlab	
Campbell_Lfijo.m	Este m-file calcula el estado estacionario, calcula los coeficientes de la solución derivados del método de coeficientes indeterminados. Además, calcula la función impulso-respuesta y realiza una simulación de las variables. Finalmente, aplica el filtro HP para obtener la tendencia y el ciclo de cada variable simulada
Campbell_Lfijo_Sim_Parametros.m	Este m-file simula los valores de las elasticidades (coeficientes de la solución) en función de la persistencia (ϕ) y de la ESI del consumo (σ).
Campbell_Lfijo_Sim_Variables.m	Este m-file simula 100 veces las variables (forma ARMA(p,q)) para 150 periodos. Cabe mencionar que ambos parámetros pueden ser cambiados por el usuario para realizar distintas simulaciones.
Dynare	
Campbell_Lfijo_Dynare_nolineal_log.mod	Este archivo mod contiene el modelo nolineal con variables en logarítmo. Este archivo es el que usa Dynare para resolver el modelo.
Campbell_Lfijo_Dynare_lineal_log.mod	Este archivo mod contiene el modelo lineal con variables en logarítmo. Este archivo es el que usa Dynare para resolver el modelo. Cabe mencionar que ambos archivos mod brindan el mismo resultado en cuanto a las funciones de política y de estado.

Capítulo 5

Modelo RBC con trabajo variable

5.1. Introducción

Este capítulo tiene dos objetivos. El primero es extender el modelo del capítulo 4 al considerar que el trabajo es variable. Esta extensión permite entender el rol que juega el mercado de trabajo en los ciclos económicos. El segundo objetivo es comparar el desempeño del modelo de Long y Plosser (1983), desarrollado en el capítulo 3, con los dos modelos de Campbell (1994): el modelo con trabajo fijo, desarrollado en el capítulo 4 y el modelo con trabajo variable, desarrollado en este capítulo. Una ventaja del modelo de este capítulo es que bajo el supuesto de elasticidad de sustitución del trabajo igual a uno y depreciación total, se puede obtener el modelo de Long y Plosser (1983); es decir, este último modelo es un caso particular de un modelo más general descrito en este capítulo.

Con estos objetivos en mente, este capítulo tienedos secciones importantes. En la primera sección se describe los elementos del modelo; es decir, se describe el comportamiento de las familias, las empresas, el equilibrio de mercado y el choque de productividad como también se especifica el sistema de ecuaciones que resume el modelo. Además, se asigna los valores a los parámetros (calibración), se calcula el estado estacionario y se log-linealiza el sistema de ecuaciones. Finalmente, se resuelve dicho sistema por el método de coeficientes indeterminados, el cual fue explicado en el capítulo 4.

En la segunda sección se analiza la solución del modelo. Este análisis comprende la sensibilidad de los coeficientes de la solución ante distintos valores de los parámetros profundos del modelo. La idea detrás de este análisis es evaluar como responde la solución del modelo cuando los parámetros cambian. Una conclusión de este análisis es, por ejemplo, que los coeficientes de la solución asociados al stock de capital no es sensible al parámetro de persistencia del choque ϕ. Además, en esta sección se calcula la función impulso-respuesta ante un choque de productividad. Finalmente, se realizan dos análisis: el primero evalúa la necesidad que el choque de productividad sea significativo para que el modelo RBC tenga la capacidad de replicar los datos. El segundo evalúa la importancia de la elasticidad de la oferta de trabajo en mejorar la capacidad del modelo en replicar los datos.

5.2. Elementos del modelo

5.2.1. Construcción del modelo

Familias

En este modelo se asume que la economía está poblada por un conjunto de familias idénticas que tienen vida infinita. Estas familias obtienen bienestar del consumo de bienes (c_t) y de las horas de ocio (l_t). Estas preferencias se reflejan en la siguiente función de utilidad:

$$u(c_t, h_t) = ln(c_t) + \theta \frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n}$$

Donde θ representa la valoración que el consumidor brinda al ocio en su función de utilidad, y γ_n representa la inversa de la elasticidad de sustitución del trabajo y también representa, como se verá más adelante, la inversa de la elasticidad de la oferta de trabajo (elasticidad de Frisch). Además, la dotación de horas totales que dispone la familia se normaliza a uno, de tal forma que la distribución del tiempo cumple con la siguiente restricción:

$$l_t + h_t = 1$$

Donde h_t son horas destinadas al trabajo y l_t son horas destinadas al ocio. Dado que las familias tienen expectativas racionales y son optimizadoras, entonces estas maximizan su función de utilidad esperada descontada representada por:

$$\underset{\{c_t,h_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ln(c_t) + \theta \frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \right] \tag{5.1}$$

Las familias deben de elegir la senda temporal óptima de c_t, h_t y k_{t+1}. De otro lado, la restricción presupuestaria de la familia está definida por la siguiente expresión:

$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t \tag{5.2}$$

Donde:

- i_t es la inversión, con cual la familia acumula stock de bienes de capital que a su vez alquila a las empresas.
- w_t representa el salario real.
- r_t es la tasa de alquiler del capital que pagan las empresas.

Además, se supone que las familias son dueñas de los bienes de capital en la economía, por lo cual deben de invertir (i_t) para ofrecer capital en "t+1". La ecuación de movimiento del capital es:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{5.3}$$

Problema de optimización de la familia
El problema de optimización de la familia se resume en la ecuación (5.1) sujeto a la restricción presupuestaria, ecuación (5.2), y a la ley de movimiento del capital, ecuación(5.3):

$$\underset{\{c_t,h_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ln(c_t) + \theta \frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \right]$$
$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t$$
$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

Función de Lagrange y condiciones de primer orden
Al observar las dos restricciones se puede concluir que ambas podrían convertirse en una sola restricción. Para ello se despeja la inversión i_t de la ecuación de movimiento del capital y se reemplaza en la restricción presupuestaria. De esta forma se obtiene la siguiente única restricción:

$$c_t + k_{t+1} = w_t h_t + (r_t + (1-\delta))k_t \tag{5.4}$$

Dada esta única restricción y la función objetivo, entonces la función de Lagrange estaría definida por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L} = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \big[u(c_t, h_t) + \lambda_t (w_t h_t + r_t k_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) \big] \right\}$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{c_t} + \lambda_t(-1) = 0 \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t} = 0 \Longrightarrow \frac{-\theta}{(1-h_t)^{\gamma_n}} + \lambda_t(w_t) = 0 \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \Longrightarrow E_t \big[\lambda_t(-1) + \beta \lambda_{t+1}(r_{t+1} + (1-\delta)) \big] = 0 \tag{5.7}$$

Condición Intratemporal: es representada por la oferta de trabajo, la cual se obtiene de la ecuación (5.5) y (5.6):

$$\theta(1-h_t)^{-\gamma_n} = \frac{w_t}{c_t} \tag{5.8}$$

Condición Intertemporal: es representada por la ecuación de Euler, la cual indica la senda óptima del consumo. Esta se obtiene de (5.5) y (5.7):

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [r_{t+1} + (1-\delta)] \right] \tag{5.9}$$

La ecuación (5.8) y (5.9) representan las dos principales ecuaciones de comportamiento de las familias. Una de estas ecuaciones es la oferta de trabajo, la cual está influenciada por el parámetro γ_n. La inversa de este parámetro es conocido en la literatura como la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo, la cual se detalla a continuación.

Elasticidad Frisch de la Oferta de Trabajo (EFOT): es el cambio porcentual en la oferta de trabajo ante un cambio porcentual en el salario real manteniendo la utilidad marginal del consumo constante. Además, la EFOT mide el *efecto sustitución* que un cambio en

el salario real genera en la oferta laboral. Es decir no considera el *efecto ingreso* que se deriva de la sustitución intratemporal entre el consumo/ocio. El cálculo de la EFOT tiene tres pasos, los cuales se describen a continuación:

Paso 1: se calcula la diferenciación total de la oferta de trabajo (5.8) del cual se obtiene la ecuación (5.10):

$$
\begin{aligned}
\theta(1-h_t)^{-\gamma_n} &= \frac{w_t}{c_t} \\
\text{Aplicando} &: \text{Diferenciación total} \\
\theta(-\gamma_n)(1-h_t)^{-\gamma_n-1}(-\Delta h_t) &= \frac{c_t\Delta w_t - w_t\Delta c_t}{c_t^2} \\
\text{Ordenando los términos} &: \\
\theta(1-h_t)^{-\gamma_n}\frac{\gamma_n}{(1-h_t)}\Delta h_t &= \frac{\Delta w_t}{c_t} - \frac{w_t}{c_t}\frac{\Delta c_t}{c_t} \\
\text{Por la oferta de trabajo} &: \theta(1-h_t)^{-\gamma_n} = \frac{w_t}{c_t} \\
\frac{w_t}{c_t}\frac{\gamma_n}{(1-h_t)}\Delta h_t &= \frac{\Delta w_t}{c_t} - \frac{w_t}{c_t}\frac{\Delta c_t}{c_t} \\
\gamma_n\frac{\Delta h_t}{(1-h_t)} &= \frac{\frac{\Delta w_t}{c_t} - \frac{w_t}{c_t}\frac{\Delta c_t}{c_t}}{\frac{w_t}{c_t}} \\
\gamma_n\frac{\Delta h_t}{(1-h_t)} &= \frac{\Delta w_t}{w_t} - \frac{\Delta c_t}{c_t} \\
\gamma_n\frac{h_t}{h_t}\frac{\Delta h_t}{(1-h_t)} &= \frac{\Delta w_t}{w_t}[1 - \frac{\Delta c_t/c_t}{\Delta w_t/w_t}] \\
\gamma_n\frac{h_t}{1-h_t}\frac{\Delta h_t}{h_t} &= \frac{\Delta w_t}{w_t}[1 - \frac{\Delta c_t/c_t}{\Delta w_t/w_t}] \\
\frac{\Delta h_t/h_t}{\Delta w_t/w_t} &= \frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{1-h_t}{h_t}\right][1 - \frac{\Delta c_t/c_t}{\Delta w_t/w_t}] \\
e_t^{hw} &= \frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{1-h_t}{h_t}\right][1 - e_t^{cw}] \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

Donde, e_t^{hw} representa la elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real ($\frac{\Delta h_t/h_t}{\Delta w_t/w_t}$); de otro lado, e_t^{cw} es la elasticidad del consumo con respecto al salario real ($\frac{\Delta c_t/c_t}{\Delta w_t/w_t}$).

Paso 2: según la definición del la "Elasticidad de Frisch", la utilidad marginal del consumo se mantiene constante, lo cual indica un nivel de consumo fijo invariante ante cambios en el salario real, por lo cual la e_t^{cw} seria igual a cero.

Paso 3: finalmente la EFOT queda representada por la siguiente expresión:

$$e_t^{hw} = \frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{1-h_t}{h_t}\right] \qquad (5.11)$$

Por tanto, la EFOT (e_t^{hw}) depende de manera inversa del γ_n. Por esta razón se considera que γ_n es la inversa de la elasticidad de Frisch (EFOT).

En el modelo RBC, una mayor elasticidad de Frisch (menor γ_n) amplifica más el choque de productividad. Es decir, la oferta de trabajo más elastica incrementa más el trabajo y por ende el producto en t.

Elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo: la tasa marginal de sustitución ($TMgS_{1,2}$) indica la cantidad del bien 1 que se esta dispuesto a ceder si se incrementa en una unidad el bien 2 manteniendo constante el nivel de utilidad.

$$TMgS_{1,2} = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -\frac{UMg_2}{UMg_1}$$

De otro lado, la elasticidad de sustitución ($ES_{1,2}$) mide la facilidad de sustituir un bien con respecto a otro; además, mide la curvatura de la curva de indiferencia y por tanto la sustituibilidad entre bienes.

$$ES_{1,2} = \frac{\partial ln(x_1/x_2)}{\partial ln(TMgS_{1,2})}$$

Asimismo, cabe mencionar que la **elasticidad de sustitución** se observa en dos dimensiones:

Cuadro 5.1: Elasticidad de sustitución

Intratemporal (c_t, l_t)	**Intertemporal** (c_t, c_{t+1})
$TMgSI_{c_t,l_t} = -\frac{UMg_l}{UMg_c}$	$TMgSI^c_{t+1,t} = -E_t\left[\frac{UMg_{c_t}}{\beta UMg_{c_{t+1}}}\right]$
$ESI_{c_t,l_t} = \frac{\partial ln(c_1/l_t)}{\partial ln(TMgSI_{c_t,l_t})}$	$ESI^c_{t+1,t} = \frac{\partial ln(c_{t+1}/c_t)}{\partial ln(TMgSI^c_{t+1,t})}$

Aplicando el caso intertemporal para la oferta de trabajo se obtiene la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo (h_t, h_{t+1}):

- $TMgSI^h_{t+1,t} = -E_t\left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{1-h_t}{1-h_{t+1}}\right)^{-\gamma_n}\right]$
- $ESI^h_{t+1,t} = -\frac{1}{\gamma_n}E_t\left[\frac{1-h_{t+1}}{h_{t+1}}\right]$

Según la expresión de $ESI^h_{t+1,t}$, el parámetro γ_n se puede considerar como la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo. En este escenario la **elasticidad de Frisch** y la $ESI^h_{t+1,t}$ son similares.

Empresas

En este modelo se asume que las empresas se desarrollan en un contexto de competencia perfecta tanto en el mercado de bienes como en el mercado de factores de producción. En este escenario, la empresa representativa maximiza su función de beneficios sujeta a su

tecnología (función de producción). Dicho problema de optimización está descrito de la siguiente manera:

$$\underset{\{k_t,h_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \quad \Pi_t = y_t - [w_t h_t + r_t k_t]$$

Sujeto a la función de producción o tecnología disponible:

$$y_t = a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \tag{5.12}$$

La función de producción se puede reemplazar en la función de beneficios π_t permitiendo que el problema de optimización se redusca a uno sin restricciones:

$$\underset{\{k_t,h_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \quad \Pi_t = a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - [w_t h_t + r_t k_t] \tag{5.13}$$

Derivando directamente la función objetivo, ecuación (5.13), con respecto al capital k_t y al trabajo h_t se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_t}{\partial k_t} = 0 \Longrightarrow a_t \alpha k_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} - r_t &= 0 \\
\alpha \frac{a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}}{k_t} &= r_t \\
\text{Demanda del capital} &: \\
\alpha \frac{y_t}{k_t} &= r_t
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_t}{\partial h_t} = 0 \Longrightarrow a_t (1-\alpha) k_t^{\alpha} h_t^{-\alpha} - w_t &= 0 \\
(1-\alpha) \frac{a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}}{h_t} &= w_t \\
\text{Demanda del trabajo} &: \\
(1-\alpha) \frac{y_t}{h_t} &= w_t
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Equilibrio de mercado y definicion del choque

Para completar el modelo es necesario agregar dos ecuaciones. La primera ecuación hace referencia al equilibrio en el mercado de bienes, la cual está descrito por la siguiente expresión:

$$y_t = c_t + i_t \tag{5.16}$$

La segunda ecuación describe el comportamiento de la "productividad", que se comporta como un AR(1):

$$ln(a_t) = \phi ln(a_{t-1}) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_{\epsilon}^2) \tag{5.17}$$

Donde: ϵ es llamado "choque de productividad".

Sistema de ecuaciones principales

El cuadro [5.2] muestra las ecuaciones que describen el comportamiento óptimo de las familias como de las empresas; asi también indica las ecuaciones de equilibrio de mercado y del comportamiento de la productividad. Todo este conjunto de ecuaciones forman un sistema que representa al modelo RBC con trabajo variable en línea con Campbell (1994).

Cuadro 5.2: Sistema de ecuaciones no lineales principales

Ecuaciones	**Descripción**
$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$	Demanda del capital
$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [r_{t+1} + (1-\delta)] \right]$	Ecuación de Euler
$\theta(1-h_t)^{-\gamma_n} = \frac{w_t}{c_t}$	Oferta de trabajo
$h_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{w_t}$	Demanda de trabajo
$y_t = a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$	Función de producción
$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$	Ley de movimiento del capital
$lna_t = \phi lna_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

5.2.2. Calibración

Los valores de los parámetros corresponden a la calibración de Campbell (1994) excepto el valor de θ que ha sido tomado de Prescott (1986). El cuadro [5.3] muestra los valores asociados a los parámetros.

Cuadro 5.3: Calibración

Parámetro	**Observación**
$\alpha = 0.333$	Proporción del capital en el ingreso nacional
$\gamma_n = 0.25$	Inversa de la elasticidad de Frisch (valor para simular)
$\delta = 0.025$	Corresponde a una depreciación del 10 % anual
$\theta = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} = 2$	ϵ es el tiempo productivo orientado a actividades no-mercado
$\rho = 0.95$	La productividad es estacionaria
$\beta = 0.984$	
$\sigma = 0.01$	Desviación estándar del choque de productividad

5.2.3. Estado estacionario

Se conoce como equilibrio de largo plazo donde $\Delta x_t = 0$ (para todas las variables del modelo) y que el choque de productividad (ε_t) toma su valor promedio (= 0). Además, dada la ecuación de movimiento de la productividad, su valor de estado estacionario es $a = 1$. Asimismo, las expectativas desaparecen, por ello se le conoce como solución no estocástica. Cabe mencionar que hallar el estado estacionario es un paso previo a la log-linelización. En el cuadro [5.4] se escribe las ecuaciones principales del modelo en su versión de estado estacionario.

Cuadro 5.4: Sistema de ecuaciones no lineales principales en estado estacionario

Ecuaciones	Descripción
[1] $r_{ss} = \alpha \frac{y_{ss}}{k_{ss}}$	Demanda del capital
[2] $\frac{1}{c_{ss}} = \beta \left[\frac{1}{c_{ss}} [r_{ss} + (1-\delta)] \right]$	Ecuación de Euler
[3] $\theta(1-h_{ss})^{-\gamma_n} = \frac{w_{ss}}{c_{ss}}$	Oferta de trabajo
[4] $h_{ss} = (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{w_{ss}}$	Demanda de trabajo
[5] $y_{ss} = a_{ss} k_{ss}^{\alpha} h_{ss}^{1-\alpha}$	Función de producción
[6] $y_{ss} = c_{ss} + i_{ss}$	Equilibrio mercado de bienes
[7] $k_{ss} = (1-\delta)k_{ss} + i_{ss}$	Ley de movimiento del capital
[8] $lna_{ss} = \phi lna_{ss} + \epsilon_{\text{valor medio}}$	Choque de productividad

De la *ecuación 8* del cuadro [5.3] se obtiene que el único valor que resuelve la expresión $lna_{ss} = \phi lna_{ss}$ es $a_{ss} = 1$. Asimismo, de la *ecuación 2* se obtiene la tasa de interés en estado estacionario:

$$r_{ss} = \frac{1}{\beta} - (1-\delta) \tag{5.18}$$

De la *ecuación 7* se obtiene el ratio inversión/capital en estado estacionario:

$$\frac{i_{ss}}{k_{ss}} = \delta \tag{5.19}$$

De la *ecuación 1*, que describe la demanda de capital, se obtiene el ratio producto/capital en estado estacionario:

$$\frac{y_{ss}}{k_{ss}} = \frac{r_{ss}}{\alpha} \tag{5.20}$$

De la *ecuación 5*, luego de considerar que $a_{ss} = 1$, se obtiene:

$$\frac{y_{ss}}{k_{ss}} = \left[\frac{h_{ss}}{k_{ss}}\right]^{1-\alpha} \tag{5.21}$$

Dado que en la ecuación (5.20) se encontró el valor del ratio y_{ss}/k_{ss}, entonces:

$$\frac{h_{ss}}{k_{ss}} = \left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{5.22}$$

Los elementos de la *ecuación 6*, que expresa el equilibrio en el mercado de bienes, puede ser dividida por el valor del capital en estado estacionario (k_{ss}):

$$\frac{y_{ss}}{k_{ss}} = \frac{c_{ss}}{k_{ss}} + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} \tag{5.23}$$

De la ecuación (5.19) se sabe que el ratio i_{ss}/k_{ss} es igual a δ. Además, por la ecuación [5.21] se tiene que el ratio y_{ss}/k_{ss} es igual a $\frac{r_{ss}}{\alpha}$. Bajo estos valores, la ecuación (5.23) quedaría descrita por:

$$\frac{r_{ss}}{\alpha} = \frac{c_{ss}}{k_{ss}} + \delta \tag{5.24}$$

Este resultado permite encontrar el ratio c_{ss}/k_{ss}:

$$\frac{c_{ss}}{k_{ss}} = \frac{r_{ss}}{\alpha} - \delta \tag{5.25}$$

De otro lado, diviendo los dos lados de la ecuación de la demanda de trabajo [ecuación 4] por el valor del capital en estado estacionario se tiene:

$$\frac{h_{ss}}{k_{ss}} = (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{w_{ss}k_{ss}} \tag{5.26}$$

De esta ecuación se despeja el salario real en estado estacionario w_{ss}:

$$w_{ss} = (1-\alpha)\frac{\frac{y_{ss}}{k_{ss}}}{\frac{h_{ss}}{k_{ss}}} \tag{5.27}$$

Además, de la ecuación (5.22) se sabe que el ratio h_{ss}/k_{ss} es una constante y es igual a $\left[\frac{R_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Asimismo, por la ecuación 5.20 se tiene que el ratio y_{ss}/k_{ss} es igual a $\frac{r_{ss}}{\alpha}$. Estos dos valores permiten obtener el valor del salario real en estado estacionario w_{ss}:

$$w_{ss} = (1-\alpha)\frac{\frac{r_{ss}}{\alpha}}{\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

$$w_{ss} = (1-\alpha)\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \tag{5.28}$$

Finalmente, en la oferta de trabajo [ecuación 3] se multiplica y divide por k_{ss} al trabajo en estado estacionario (h_{ss}) y al consumo (c_{ss}):

$$\theta(1 - k_{ss}\frac{h_{ss}}{k_{ss}})^{-\gamma_n} = \frac{w_{ss}}{k_{ss}\frac{c_{ss}}{k_{ss}}} \tag{5.29}$$

De esta expresión, el valor de w_{ss}, $\frac{c_{ss}}{k_{ss}}$ y $\frac{h_{ss}}{k_{ss}}$ son conocidos. Por temas de simplicidad se considera que el ratio $\frac{c_{ss}}{k_{ss}}$ es igual a η_1, y que $\frac{w_{ss}}{\frac{c_{ss}}{k_{ss}}}$ es igual a η_2. Por tanto se tiene:

$$\theta(1 - \eta_1 k_{ss})^{-\gamma_n} = \frac{\eta_2}{k_{ss}} \tag{5.30}$$

Esta ecuación es no lineal en el capital de estado estacionario (k_{ss}). Si se encuentra el valor del capital que resuelve esta ecuación, entonces se encontrará todos los valores de las variables en estado estacionario, ya que dichas variables dependen del capital. Cabe mencionar que la no linealidad de esta ecuación se debe al parámetro γ_n (inversa de la elasticidad de Frisch). Si el valor de este parámetro es igual a uno, entonces la no linealidad desaparece y el valor de k_{ss} es igual a $\frac{\eta_2}{\theta+\eta_1\eta_2}$. Cabe mencionar que γ_n sea igual a uno significa que el trabajo en la función de utilidad se expresa como el $ln(1-h_t)$.

De manera alternativa, la ecuación (5.29) se puede expresar de manera no lineal en el trabajo. Esta opción es mejor debido a que se sabe que el valor del trabajo en estado estacionario está entre cero y uno; es decir, $h_{ss} \in [0,1]$. Esto es importante debido a que las técnicas de optimización numérica (aprcximaciones) requieren un punto inicial. Por tanto, la ecuación [5.29] quedaría de la siguiente manera:

$$\theta(1-h_{ss})^{-\gamma_n} = \frac{w_{ss}}{h_{ss}\frac{k_{ss}}{h_{ss}}\frac{c_{ss}}{k_{ss}}} \tag{5.31}$$

Simplificando esta expresión, se tiene:

$$\begin{aligned}
\theta(1-h_{ss})^{-\gamma_n} &= \frac{w_{ss}}{h_{ss}\frac{k_{ss}}{h_{ss}}\frac{c_{ss}}{k_{ss}}} \\
\theta\frac{c_{ss}}{k_{ss}}\frac{k_{ss}}{h_{ss}}h_{ss} &= w_{ss}(1-h_{ss})^{\gamma_n} \\
\text{Reordenando los términos} &: \\
\underbrace{\theta\frac{c_{ss}}{k_{ss}}}_{=\gamma_1}h_{ss} &= \underbrace{w_{ss}\frac{h_{ss}}{k_{ss}}}_{\gamma_2}(1-h_{ss})^{\gamma_n} \\
\gamma_1 h_{ss} &= \gamma_2(1-h_{ss})^{\gamma_n} \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

La ecuación (5.32) puede ser resuelta por métodos numéricos. Para ello se ha construido una función llamada “trabajo_ss.m”, la cual resuelve la ecuación (5.32) y por tanto brinda un valor de h_{ss}. Dado este valor, entonces se puede obtener el valor de estado estacionario de las demás variables. Por ejemplo, de la ecuación (5.22) se puede obtener el capital k_{ss}:

$$\begin{aligned}
\frac{h_{ss}}{k_{ss}} &= \left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
k_{ss} &= h_{ss}\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{-1}{1-\alpha}} \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

Al tener el valor de k_{ss} entonces de la ecuación (5.20) se obtiene la producción y_{ss}:

$$\begin{aligned}
\frac{y_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{r_{ss}}{\alpha} \\
y_{ss} &= k_{ss}\frac{r_{ss}}{\alpha} \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

De la misma manera al considerar el valor de k_{ss} en la ecuación (5.19) se obtiene el valor de la inversión en estado estacionario i_{ss}.

$$\begin{aligned}
\frac{i_{ss}}{k_{ss}} &= \delta \\
i_{ss} &= \delta k_{ss} \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

El consumo de estado estacionario c_{ss} se puede obtener de la ecuación (5.23) debido a que se conoce el producto y la inversión (ambos en estado estacionario).

$$\begin{aligned}
\frac{y_{ss}}{k_{ss}} &= \frac{c_{ss}}{k_{ss}} + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} \\
c_{ss} &= y_{ss} - i_{ss} \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

En el cuadro [5.5] se indica la expresión del estado estacionario de cada variable del modelo.

Cuadro 5.5: Estado estacionario

Estado estacionario (forma recursiva)
$r_{ss} = \frac{1}{\beta} - (1-\delta)$
$a_{ss} = 1$
$w_{ss} = (1-\alpha)\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$
$\gamma_1 h_{ss} = \gamma_2(1-h_{ss})^{\gamma_n}$
$k_{ss} = h_{ss}\left[\frac{r_{ss}}{\alpha}\right]^{\frac{-1}{1-\alpha}}$
$y_{ss} = k_{ss}\frac{r_{ss}}{\alpha}$
$i_{ss} = \delta k_{ss}$
$c_{ss} = y_{ss} - i_{ss}$

5.2.4. Log-linealización

De la misma forma que en los capítulos previos, el modelo será log-linealizado siguiendo la técnica de Uhlig (1995). En primer lugar se define la variable $\widehat{x}_t$ como la diferencia entre el logarítmo de la variable "x" y el logarítmo de su estado estacionario "x_{ss}":

$$\widehat{x}_t = lnx_t - lnx_{ss}$$

Esta expresión puede ser reordenada de tal manera que la variable x quede en función de su estado estacionario x_{ss} y de la variable $\widehat{x}_t$:

$$x_t = x_{ss}e^{\widehat{x}_t} \tag{5.37}$$

Esta expresión de "x_t" se reemplazará en todas las ecuaciones del modelo no lineal. En segundo lugar, la expresión (5.37) requiere que $e^{\widehat{x}_t}$ sea aproximada por una función lineal. De lo contrario, el sistema de ecuaciones aún mantendría su naturaleza no-lineal. Ante ello, se apróxima $e^{\widehat{x}_t}$ por medio de la expansión de Taylor de primer orden, donde el punto de referencia para la aproximación es el estado estacionario. Al aplicar la expansión de Taylor, $e^{\widehat{x}_t}$ quedaría expresado de la siguiente manera:

$$e^{\widehat{x}_t} \approx 1 + \widehat{x}_t \tag{5.38}$$

Considerando la propiedad (5.37) y (5.38) se procede a log-linealizar el sistema descrito en el cuadro [5.3]:

Demanda del capital: para encontrar la demanda del capital log-lineal primero se reemplaza cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$, donde $\widehat{x}_t$ es la variable en desviación porcentual del lnx_t con respecto a su estado estacionario (segunda línea). Luego de realizar algunas operaciones algebraicas se llega a la línea 4, en donde se aplica la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1 + x$) obteniendose la línea 5. Finalmente la ecuación (5.39) es la ecuación log-lineal de la demanda de capital.

$$\begin{aligned}
k_t &= \alpha \frac{y_t}{r_t} \qquad \text{Línea 1} \\
k_{ss} e^{\widehat{k}_t} &= \alpha \frac{y_{ss} e^{\widehat{y}_t}}{r_{ss} e^{\widehat{r}_t}} \qquad \text{Línea 2} \\
e^{\widehat{k}_t} &= \frac{e^{\widehat{y}_t}}{e^{\widehat{r}_t}} \qquad \text{Línea 3} \\
e^{\widehat{k}_t} &= e^{\widehat{y}_t - \widehat{r}_t} \qquad \text{Línea 4} \\
1 + \widehat{k}_t &= 1 + \widehat{y}_t - \widehat{r}_t \qquad \text{Línea 5} \\
\widehat{k}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{r}_t
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Ecuación de Euler: para encontrar la ecuación de Euler log-lineal primero se realiza un cambio de variable ($z_{t+1} = r_{t+1} + (1 - \delta)$), la cual se aprecia en la segunda línea de la ecuación (5.40). Esto se debe a que para simplificar la transformación log-lineal de una ecuación es preferible que todas las variables estén en forma multiplicativa. En segundo lugar, se reemplaza cada variable x_t por su expresión $x_{ss} e^{\widehat{x}_t}$, donde $\widehat{x}_t$ es la variable en desviación porcentual del lnx_t con respecto a su estado estacionario (tercera línea de la ecuación (5.40). Luego de realizar algunas operaciones algebraicas se llega a la línea 5, en donde se aplica la aproximación de primer orden ($e^{\widehat{x}} \approx 1 + \widehat{x}$) obteniendose la línea 6 y luego de eliminar la constante (número uno) se llega a la línea 7.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_t} &= \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [R_{t+1} + (1 - \delta)] \right] \\
\frac{1}{c_t} &= \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [z_{t+1}] \right] \\
\frac{1}{c_{ss} e^{\widehat{c}_t}} &= \beta E_t \left[\frac{1}{c_{ss} e^{\widehat{c}_{t+1}}} [z_{ss} e^{\widehat{z}_{t+1}}] \right] \\
\frac{1}{e^{\widehat{c}_t}} &= E_t \left[\frac{1}{e^{\widehat{c}_{t+1}}} [e^{\widehat{z}_{t+1}}] \right] \\
e^{-\widehat{c}_t} &= E_t \left[e^{\widehat{z}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}} \right] \\
1 - \widehat{c}_t &= E_t [1 + \widehat{z}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}] \\
-\widehat{c}_t &= E_t [\widehat{z}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}]
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Para terminar de caracterizar la ecuación log-lineal de Euler se debe de encontrar $\widehat{z}_{t+1}$ en función de la tasa de interés en log-desviaciones de su estado estacionario ($\widehat{r}_{t+1}$). Para ello primero se debe de considerar dicha relación en estado estacionario:

$$Z_{ss} = r_{ss} + (1 - \delta) \underbrace{=}_{\text{por la ecuación (5.18)}} \frac{1}{\beta} \tag{5.41}$$

La relación entre $\widehat{z}_{t+1}$ y $\widehat{r}_{t+1}$ se expresa en la ecuación (5.42):

$$
\begin{aligned}
z_{t+1} &= r_{t+1} + (1-\delta) \\
Z_{ss}e^{\widehat{z}_{t+1}} &= r_{ss}e^{\widehat{r}_{t+1}} + (1-\delta) \\
Z_{ss}(1+\widehat{z}_{t+1}) &= r_{ss}(1+\widehat{r}_{t+1}) + (1-\delta) \\
Z_{ss} + Z_{ss}\widehat{z}_{t+1} &= r_{ss} + r_{ss}\widehat{r}_{t+1} + (1-\delta) \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

Al considerar la relación de estado estacionario de la ecuación (5.41) en la ecuación (5.42) se tiene:

$$
\begin{aligned}
Z_{ss}\widehat{z}_{t+1} &= r_{ss}\widehat{r}_{t+1} \\
\frac{1}{\beta}\widehat{z}_{t+1} &= r_{ss}\widehat{r}_{t+1} \\
\widehat{z}_{t+1} &= \beta r_{ss}\widehat{r}_{t+1} \qquad (5.43)
\end{aligned}
$$

Al introducir la ecuación (5.43) en (5.40) se obtiene la ecuación log-lineal de Euler:

$$
\begin{aligned}
-\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{z}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}] \\
-\widehat{c}_t &= E_t[\beta r_{ss}\widehat{r}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}] \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

Oferta de trabajo: para obtener la ecuación log-lineal de la oferta de trabajo, al igual que la ecuación de Euler, se realiza un cambio de variable para que todos los términos de la ecuación estén multiplicando. En ese sentido se reemplaza $1-h_t$ por hh_t (línea dos de la ecuación (5.45). Asimismo, al igual que en las ecuaciones previas, cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$ (tercera línea de la ecuación (5.45)), y se ha aplicado la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1+\widehat{x}$)(séptima línea de la ecuación (5.45)).

$$
\begin{aligned}
\theta(1-h_t)^{-\gamma_n} &= \frac{w_t}{c_t} \\
\theta(hh_t)^{-\gamma_n} &= \frac{w_t}{c_t} \\
\theta(hh_{ss}e^{\widehat{hh}_t})^{-\gamma_n} &= \frac{w_{ss}e^{\widehat{w}_t}}{h_{ss}e^{\widehat{c}_t}} \\
\theta hh_{ss}^{-\gamma_n}e^{-\gamma_n\widehat{hh}_t} &= \frac{w_{ss}e^{\widehat{w}_t}}{h_{ss}e^{\widehat{c}_t}} \\
e^{-\gamma_n\widehat{hh}_t} &= \frac{e^{\widehat{w}_t}}{e^{\widehat{c}_t}} \\
e^{-\gamma_n\widehat{hh}_t} &= e^{\widehat{w}_t-\widehat{c}_t} \\
1-\gamma_n\widehat{hh}_t &= 1+\widehat{w}_t-\widehat{c}_t \\
-\gamma_n\widehat{hh}_t &= \widehat{w}_t-\widehat{c}_t \qquad (5.45)
\end{aligned}
$$

Para terminar de encontrar la ecuación log-lineal de la oferta de trabajo es necesario encontrar la versión log-lineal del cambio de variable: $hh_t = 1-h_t$.

$$\begin{aligned}
hh_t &= 1 - h_t \\
hh_{ss}e^{\widehat{hh}_t} &= 1 - h_{ss}e^{\widehat{h}_t} \\
hh_{ss}(1 + \widehat{hh}_t) &= 1 - h_{ss}(1 + \widehat{h}_t) \\
hh_{ss} + hh_{ss}\widehat{hh}_t &= 1 - h_{ss} - h_{ss}\widehat{h}_t \\
hh_{ss}\widehat{hh}_t &= -h_{ss}\widehat{h}_t \\
\widehat{hh}_t &= -\frac{h_{ss}}{hh_{ss}}\widehat{h}_t \\
\widehat{hh}_t &= -\frac{h_{ss}}{1 - h_{ss}}\widehat{h}_t \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

Reemplazando esta ecuación (5.46) en la ecuación (5.45) se obtiene la ecuación log-linal de la oferta de trabajo (ecuación (5.47)):

$$\begin{aligned}
-\gamma_n\widehat{hh}_t &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\
-\gamma_n\left[-\frac{h_{ss}}{1 - h_{ss}}\widehat{h}_t\right] &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \\
\gamma_n\frac{h_{ss}}{1 - h_{ss}}\widehat{h}_t &= \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \qquad (5.47)
\end{aligned}$$

Demanda de trabajo: la ecuación log-lineal de la demanda de trabajo está descrita por la ecuación (5.48). Para ello, de la misma forma que en las ecuaciones previas, se ha reemplazado cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$ (segunda línea de la ecuación (5.48), y se ha aplicado la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1 + x$)(quinta línea de la ecuación (5.48)).

$$\begin{aligned}
h_t &= (1 - \alpha)\frac{y_t}{w_t} \\
h_{ss}e^{\widehat{h}_t} &= (1 - \alpha)\frac{y_{ss}e^{\widehat{y}_t}}{w_{ss}e^{\widehat{w}_t}} \\
e^{\widehat{h}_t} &= \frac{e^{\widehat{y}_t}}{e^{\widehat{w}_t}} \\
e^{\widehat{h}_t} &= e^{\widehat{y}_t - \widehat{w}_t} \\
1 + \widehat{h}_t &= 1 + \widehat{y}_t - \widehat{w}_t \\
\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{w}_t \qquad (5.48)
\end{aligned}$$

Función de producción: la ecuación log-lineal de la función de producción está descrita por la ecuación (5.49). Para ello se ha reemplazado cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$ (segunda línea de la ecuación (5.49)), y se ha aplicado la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1 + x$)(sexta línea de la ecuación (5.49)).

$$
\begin{aligned}
y_t &= a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= a_{ss} e^{\widehat{a}_t} [k_{ss} e^{\widehat{k}_t}]^{\alpha} [h_{ss} e^{\widehat{h}_t}]^{1-\alpha} \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= a_{ss} e^{\widehat{a}_t} [k_{ss}^{\alpha} e^{\alpha \widehat{k}_t}][h_{ss}^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)\widehat{h}_t}] \\
e^{\widehat{y}_t} &= e^{\widehat{a}_t} [e^{\alpha \widehat{k}_t}][e^{(1-\alpha)\widehat{h}_t}] \\
e^{\widehat{y}_t} &= e^{\widehat{a}_t + \alpha \widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t} \\
1 + \widehat{y}_t &= 1 + \widehat{a}_t + \alpha \widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t \\
\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha \widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t \qquad (5.49)
\end{aligned}
$$

Equilibrio mercado de bienes: al igual que en las ecuaciones previas, para obtener la condición de equilibrio en el mercado de bienes log-lineal se debe de reemplazar cada variable x_t por su expresión $x_{ss}e^{\widehat{x}_t}$ (segunda línea de la ecuación (5.50)), y se debe de aplicar la aproximación de primer orden ($e^x \approx 1 + x$)(tercera línea de la ecuación (5.50)).

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + i_t \\
y_{ss} e^{\widehat{y}_t} &= c_{ss} e^{\widehat{c}_t} + i_{ss} e^{\widehat{i}_t} \\
y_{ss}(1 + \widehat{y}_t) &= c_{ss}(1 + \widehat{c}_t) + i_{ss}(1 + \widehat{i}_t) \\
y_{ss} + y_{ss}\widehat{y}_t &= c_{ss} + c_{ss}\widehat{c}_t + i_{ss} + i_{ss}\widehat{i}_t \\
y_{ss}\widehat{y}_t &= c_{ss}\widehat{c}_t + i_{ss}\widehat{i}_t \\
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \qquad (5.50)
\end{aligned}
$$

Ley de movimiento del capital: la ley de movimiento del capital log-lineal está expresada en la ecuación (5.51). De igual forma que en las ecuaciones previas, se ha aplicado la transformación de la variable inicial k_t por su equivalente en log-desviaciones (línea 2 de la ecuación (5.51)). Además, se ha considerado la apróximación de Taylor de primer orden de dicha transformación (línea 5 de la ecuación (5.51)).

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t \\
k_{ss} e^{\widehat{k}_{t+1}} &= (1-\delta)k_{ss} e^{\widehat{k}_t} + i_{ss} e^{\widehat{i}_t} \\
e^{\widehat{k}_{t+1}} &= (1-\delta)e^{\widehat{k}_t} + \frac{i_{ss}}{k_{ss}} e^{\widehat{i}_t} \\
e^{\widehat{k}_{t+1}} &= (1-\delta)e^{\widehat{k}_t} + \delta e^{\widehat{i}_t} \\
1 + \widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)(1 + \widehat{k}_t) + \delta(1 + \widehat{i}_t) \\
1 + \widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta) + (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta + \delta\widehat{i}_t \\
\widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t \qquad (5.51)
\end{aligned}
$$

Choque de productividad: en estricto el choque de productividad está representada por la variable ϵ_t, la cual tiene una distribución normal con media cero y varianza constante. En este sentido, la ecuación (5.52) representa la ecuación log-lineal de la productividad (no del choque).

$$\begin{aligned} lna_t &= \phi lna_{t-1} + \epsilon_t \\ lna_{ss}e^{\widehat{a}_t} &= \phi lna_{ss}e^{\widehat{a}_{t-1}} + \epsilon_t \\ lna_{ss} + \widehat{a}_t &= \phi lna_{ss} + \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \\ \widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned} \quad (5.52)$$

El cuadro [5.6] resume el sistema de ecuaciones log-lineales que describen el modelo.

Cuadro 5.6: Sistema de ecuaciones log-lineal

Ecuaciones log-lineal	**Descripción**
$-\widehat{c}_t = E_t[\beta r_{ss}\widehat{r}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}]$	Ecuación de Euler
$\widehat{k}_t = \widehat{y}_t - \widehat{r}_t$	Demanda del capital
$\gamma_n \frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\widehat{h}_t = \widehat{w}_t - \widehat{c}_t$	Oferta de trabajo
$\widehat{h}_t = \widehat{y}_t - \widehat{w}_t$	Demanda de trabajo
$\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t$	Función de producción
$\widehat{y}_t = \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t$	Equilibrio mercado de bienes
$\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \widehat{\delta i_t}$	Ley de movimiento del capital
$\widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$	Choque de productividad

5.2.5. Solución del sistema lineal

Método de coeficientes indeterminados

En la literatura de modelos de equilibrio general, los métodos para encontrar la solución se han focalizado en resolver el sistema de ecuaciones lineales (o log-lineales). De manera similar a los capítulos previos, en este capítulo se aplica el método de coeficientes indeterminados. La solución consiste en colocar las variables endógenas en función de las variables de estado y del choque. Por ejemplo para el capital, el producto y el consumo se tiene:

$$\widehat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t \quad (5.53)$$

$$\widehat{y}_t = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \eta_{ya}\widehat{a}_t \quad (5.54)$$

$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t \quad (5.55)$$

Cabe mencionar que debido a que el sistema de ecuaciones ha sido log-linealizado (ver cuadro [5.4]), entonces las variables están expresadas como log-desviaciones de su estado estacionario; es decir, $\widehat{x}_t = lnx_t - lnx_{ss}$. Asimismo, los coeficientes de la solución (por ejemplo, las ecuaciones (5.53), (5.54) y (5.55)) expresan elasticidad; es decir, de la ecuación (5.53) se puede apreciar lo siguiente: si el capital de hoy se incrementa en 1 %, entonces el capital de mañana se incrementa en η_{kk} %. Esto se observa en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t \\
\text{Diferenciando} &: \\
\Delta\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{kk}\Delta\widehat{k}_t + \eta_{ka}\Delta\widehat{a}_t \\
\text{Asumiendo} &: \ \widehat{a}_t \quad \text{se mantiene constante} \\
\Delta\widehat{k}_{t+1} &= \eta_{kk}\Delta\widehat{k}_t + 0 \\
\Delta[lnk_{t+1} - lnk_{ss}] &= \eta_{kk}\Delta[lnk_t - lnk_{ss}] \\
\Delta[lnk_{t+1}] - 0 &= \eta_{kk}\Delta[lnk_t] - 0 \\
\frac{\Delta k_{t+1}}{k_{t+1}} &= \eta_{kk}\frac{\Delta k_t}{k_t} \\
\frac{\frac{\Delta k_{t+1}}{k_{t+1}}}{\frac{\Delta k_t}{k_t}} &= \eta_{kk} \\
E_{k_{t+1},k_t} &= \eta_{kk} \qquad (5.56)
\end{aligned}$$

La expresión (5.56) indica claramente que η_{kk} representa la elasticidad del capital de mañana ante el capital de hoy manteniendo lo demás constante. Por tanto, un incremento en $1\,\%$ en el capital de hoy incrementa en $\eta_{kk}\,\%$ el capital de mañana manteniendo lo demás constante. De esta forma se lee cada uno de los coeficientes de la solución del modelo. Cabe mencionar que cualquiera sea el método de solución del modelo la solución siempre está descrita por las ecuaciones (5.53), (5.54), (5.55) y las demás ecuaciones de las variables endógenas que mantienen la misma forma. El método de coefientes indeterminados consiste en encontrar los valores de los coeficientes de la solución en función de los parámetros. Cuando se encuentra dichos coeficientes entonces la solución queda bien definida.

Antes de aplicar el método de coeficientes indeterminados se debe de reducir el sistema de ecuaciones lo máximo posible. En este modelo de ocho ecuaciones, lo ideal sería reducir el sistema hasta tres o cuatro ecuaciones.

[A] Reducción de sistema I: el sistema de ocho ecuaciones descritos en el cuadro [5.4] se puede reducir a cinco al eliminar el salario real w_t por medio del equilibrio en el mercado de trabajo, al eliminar la inversión $\widehat{i}_t$ al reemplazar la ley del movimiento del capital en el equilibrio del mercado de bienes, y al elimimar la tasa de interés real $\widehat{r}_t$ por medio de la introducción de la demanda de capital en la ecuación de Euler.

Eliminando el salario real w_t: de la demanda de trabajo se despeja el salario real:

$$\begin{aligned}
\text{Demanda de trabajo} &: \\
\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{w}_t \\
\widehat{w}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t \qquad (5.57)
\end{aligned}$$

La ecuación (5.57) se reemplaza en la oferta de trabajo, la cual esta descrita por la siguiente ecuación:

$$\gamma_n \frac{h_{ss}}{1-h_{ss}} \widehat{h}_t = \widehat{w}_t - \widehat{c}_t \tag{5.58}$$

Al igualar la oferta de trabajo con la demanda de trabajo en el salario real se tiene:

$$\begin{aligned} \underbrace{\gamma_n \left[\frac{h_{ss}}{1-h_{ss}}\right]}_{=m_1} \widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t - \widehat{c}_t \\ m_1 \widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t - \widehat{c}_t \\ (1+m_1)\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{c}_t \end{aligned} \tag{5.59}$$

Eliminando la inversión i_t: de la ley del movimiento del capital se despeja la inversión y se reemplaza en el equilibrio del mercado de bienes.

$$\begin{aligned} \text{Ley de movimiento del capital} &: \\ \widehat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t \\ \delta\widehat{i}_t &= \widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t \\ \widehat{i}_t &= \frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t] \qquad (5.60) \\ \text{Equilibrio en el mercado de bienes} &: \\ \widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}} \underbrace{\widehat{i}_t}_{\text{Ecu. (5.60)}} \\ \widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t]\right] \qquad (5.61) \end{aligned}$$

Eliminando la tasa de interés real r_t: de la demanda de capital se despeja la tasa de interés y luego se reemplaza en la ecuación de Euler.

$$\begin{aligned} \text{Demanda de capital} &: \\ \widehat{k}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{r}_t \\ \widehat{r}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{k}_t \qquad (5.62) \\ \text{Ecuación de Euler} &: \\ -\widehat{c}_t &= E_t[\beta r_{ss}\widehat{r}_{t+1} - \widehat{c}_{t+1}] \\ \widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1} - \beta r_{ss} \underbrace{\widehat{r}_{t+1}}_{\text{Ecu. (5.62)}} \ ] \\ \widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1} - \beta r_{ss}[\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}]] \qquad (5.63) \end{aligned}$$

Con estas reducciones el sistema estaría compuesto por cinco ecuaciones:

$$\begin{aligned}(1+m_1)\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{c}_t &(5.64)\\ \widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t]\right] &(5.65)\\ \widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1} - \beta r_{ss}[\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}]] &(5.66)\\ \text{Función de producción} &: \\ \widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t &(5.67)\\ \text{Choque de productividad} &: \\ \widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t &(5.68)\end{aligned}$$

[B] Reducción de sistema II: el sistema podría reducirse aún más. De la ecuación (5.64) se despeja el trabajo $\widehat{h}_t$ y se introduce en la ecuación (5.67) (función de producción).

$$\begin{aligned}\text{Equilibrio en el mercado de trabajo} &: \\ (1+m_1)\widehat{h}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{c}_t \\ \widehat{h}_t &= \left[\frac{1}{1+m_1}\right][\widehat{y}_t - \widehat{c}_t] &(5.69)\\ \text{Función de produción} &: \\ \widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\underbrace{\widehat{h}_t}_{\text{Ecu. (5.69)}} \\ \widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\left[\frac{1}{1+m_1}\right][\widehat{y}_t - \widehat{c}_t] \\ \left[1 - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t \\ \left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t &(5.70)\end{aligned}$$

Con estas reducciones adicionales el sistema estaría compuesto por cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned}\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t &(5.71)\\ \widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t]\right] &(5.72)\\ \widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1} - \beta r_{ss}[\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}]] &(5.73)\\ \text{Choque de productividad} &: \\ \widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t &(5.74)\end{aligned}$$

[C] Reducción de sistema III: el sistema previo de cuatro ecuaciones aún puede reducirse en una ecuación más. Para ello se despeja el producto $\widehat{y}_t$ de la ecuación (5.71) y se reemplaza en la ecuación (5.72) y (5.73).

$$\begin{aligned}
\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t &= \widehat{a}_t+\alpha\widehat{k}_t-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t \\
\widehat{y}_t &= \left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\left[\widehat{a}_t+\alpha\widehat{k}_t-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t\right] \qquad (5.75)
\end{aligned}$$

La ecuación (5.75) se reemplaza en la ecuación (5.71):

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t+\frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1}-(1-\delta)\widehat{k}_t]\right] \\
\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\left[\widehat{a}_t+\alpha\widehat{k}_t-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t\right] &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t+\frac{i_{ss}}{y_{ss}}\left[\frac{1}{\delta}[\widehat{k}_{t+1}-(1-\delta)\widehat{k}_t]\right] \\
\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\widehat{a}_t+\alpha\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\widehat{k}_t-\left[\frac{1-\alpha}{m_1+\alpha}\right]\widehat{c}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t+\frac{i_{ss}}{y_{ss}\delta}\widehat{k}_{t+1}-\frac{i_{ss}(1-\delta)}{y_{ss}\delta}\widehat{k}_t \\
\underbrace{\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]}_{m_2}\widehat{a}_t+\widehat{k}_t\underbrace{\left[\frac{\alpha(1+m_1)}{m_1+\alpha}+\frac{i_{ss}(1-\delta)}{y_{ss}\delta}\right]}_{m_3} &= \widehat{c}_t\underbrace{\left[\frac{c_{ss}}{y_{ss}}+\frac{1-\alpha}{m_1+\alpha}\right]}_{m_4}+\underbrace{\frac{i_{ss}}{y_{ss}\delta}}_{m_5}\widehat{k}_{t+1} \\
m_2\widehat{a}_t+m_3\widehat{k}_t &= m_4\widehat{c}_t+m_5\widehat{k}_{t+1} \\
m_4\widehat{c}_t &= m_2\widehat{a}_t+m_3\widehat{k}_t-m_5\widehat{k}_{t+1} \qquad (5.76)
\end{aligned}$$

De la misma manera la ecuación (5.75) se reemplaza en la ecuación (5.72):

$$\begin{aligned}
\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1}-\beta r_{ss}[\widehat{y}_{t+1}-\widehat{k}_{t+1}]] \\
\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1}-\beta r_{ss}[\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\left[\widehat{a}_{t+1}+\alpha\widehat{k}_{t+1}-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_{t+1}\right]-\widehat{k}_{t+1}]] \\
\widehat{c}_t &= E_t[\widehat{c}_{t+1}-\beta r_{ss}\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right]\left[\widehat{a}_{t+1}+\alpha\widehat{k}_{t+1}-\left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_{t+1}\right]-\beta r_{ss}\widehat{k}_{t+1}] \\
\widehat{c}_t &= E_t[(1+\beta r_{ss}\frac{1-\alpha}{m_1+\alpha})\widehat{c}_{t+1}-\beta r_{ss}\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\widehat{a}_{t+1}+(\beta r_{ss}-\beta r_{ss}\frac{1+m_1}{m_1+\alpha})\widehat{k}_{t+1} \\
\widehat{c}_t &= E_t[\underbrace{(1+\beta r_{ss}\frac{1-\alpha}{m_1+\alpha})}_{n_1}\widehat{c}_{t+1}-\underbrace{\beta r_{ss}\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}}_{n_2}\widehat{a}_{t+1}+\underbrace{(\beta r_{ss}-\beta r_{ss}\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\alpha)}_{n_3}\widehat{k}_{t+1} \\
\widehat{c}_t &= E_t[n_1\widehat{c}_{t+1}-n_2\widehat{a}_{t+1}+n_3\widehat{k}_{t+1}] \qquad (5.77)
\end{aligned}$$

Después de esta última reducción, el sistema de ecuaciones quedaría representado por tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}
m_4\widehat{c}_t &= m_2\widehat{a}_t+m_3\widehat{k}_t-m_5\widehat{k}_{t+1} \qquad (5.78) \\
\widehat{c}_t &= E_t[n_1\widehat{c}_{t+1}-n_2\widehat{a}_{t+1}+n_3\widehat{k}_{t+1}] \qquad (5.79) \\
\widehat{a}_t &= \phi\widehat{a}_{t-1}+\epsilon_t \qquad (5.80)
\end{aligned}$$

[D] Aplicación del método de coeficientes indeterminados: el sistema de ecuaciones representado por las ecuaciones (5.78), (5.79) y (5.80) tiene tres variables: c_t, k_{t+1} y a_t.

De estas variables dos son endógenas: c_t y k_{t+1}, a las cuales se les puede proponer una solución lineal en la variable de estado k_t y la variable exógena a_t:

$$\widehat{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t \tag{5.81}$$
$$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t \tag{5.82}$$

Reemplazando esta solución en la ecuación (5.78) se tiene:

$$\begin{aligned} m_4\widehat{c}_t &= m_2\widehat{a}_t + m_3\widehat{k}_t - m_5\widehat{k}_{t+1} \\ m_4(\eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t) &= m_2\widehat{a}_t + m_3\widehat{k}_t - m_5(\eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t) \\ (m_4\eta_{ck})\widehat{k}_t + (m_4\eta_{ca})\widehat{a}_t &= (m_2 - m_5\eta_{ka})\widehat{a}_t + (m_3 - m_5\eta_{kk})\widehat{k}_t \end{aligned} \tag{5.83}$$

Al igualar los coeficientes de cada variable del lado derecho con su correspondiente del lado izquierdo se tiene:

$$\text{Coeficientes del capital} \quad :$$
$$m_4\eta_{ck} = m_3 - m_5\eta_{kk} \tag{5.84}$$
$$\text{Coeficientes de la productividad} \quad :$$
$$m_4\eta_{ca} = m_2 - m_5\eta_{ka} \tag{5.85}$$

Al reemplazar la solución a la ecuación (5.79) se tiene:

$$\begin{aligned} \widehat{c}_t &= E_t[n_1\widehat{c}_{t+1} - n_2\widehat{a}_{t+1} + n_3\widehat{k}_{t+1}] \\ \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t &= E_t[n_1(\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1} + \eta_{ca}\widehat{a}_{t+1}) - n_2\widehat{a}_{t+1} + n_3(\eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t)] \\ (\eta_{ck} - n_3\eta_{kk})\widehat{k}_t + (\eta_{ca} - n_3\eta_{ka})\widehat{a}_t &= E_t[n_1\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1} + (n_1\eta_{ca} - n_2)\widehat{a}_{t+1}] \\ \text{Considerando que} &: \widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t \\ (\eta_{ck} - n_3\eta_{kk})\widehat{k}_t + (\eta_{ca} - n_3\eta_{ka})\widehat{a}_t &= E_t[n_1\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1} + (n_1\eta_{ca} - n_2)(\phi\widehat{a}_t + \epsilon_{t+1})] \\ &= E_t[n_1\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1}] + (n_1\eta_{ca} - n_2)E_t[\phi\widehat{a}_t + \epsilon_{t+1}] \\ &= E_t[n_1\eta_{ck}\widehat{k}_{t+1}] + (n_1\eta_{ca} - n_2)[\phi E_t\widehat{a}_t + \underbrace{E_t\epsilon_{t+1}}_{=0}] \\ \text{Reemplazando} &: \text{la solución de } \widehat{k}_{t+1} \\ &= E_t[n_1\eta_{ck}(\eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t)] + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi\widehat{a}_t \\ &= E_t[n_1\eta_{ck}\eta_{kk}\widehat{k}_t + n_1\eta_{ck}\eta_{ka}\widehat{a}_t] + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi\widehat{a}_t \\ &= (n_1\eta_{ck}\eta_{kk})\widehat{k}_t + (n_1\eta_{ck}\eta_{ka} + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi)\widehat{a}_t \\ (\eta_{ck} - n_3\eta_{kk})\widehat{k}_t + (\eta_{ca} - n_3\eta_{ka})\widehat{a}_t &= (n_1\eta_{ck}\eta_{kk})\widehat{k}_t + (n_1\eta_{ck}\eta_{ka} + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi)\widehat{a}_t \end{aligned} \tag{5.86}$$

De la ecuación (5.86) se igualan los coeficientes para cada variable. Para el capital se tiene:

$$\begin{aligned} \eta_{ck} - n_3\eta_{kk} &= n_1\eta_{ck}\eta_{kk} \\ \eta_{kk} &= \frac{\eta_{ck}}{n_3 + n_1\eta_{ck}} \end{aligned} \tag{5.87}$$

En el caso de la productividad, al igualar los coeficientes se tiene:

$$\begin{aligned}\eta_{ca} - n_3\eta_{ka} &= n_1\eta_{ck}\eta_{ka} + (n_1\eta_{ca} - n_2)\phi \\ (1-\phi n_1)\eta_{ca} &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2 \end{aligned} \tag{5.88}$$

El método de coeficientes indeterminados consiste en encontrar los valores de los coeficientes en función a los parámetros del modelo. En este caso existen cuatro coeficientes "desconocidos" (η_{ck}, η_{ca}, η_{kk} y η_{ka}). Estas cuatro "nuevas" variables requieren cuatro ecuaciones, las cuales son las siguientes:

$$\begin{aligned}\text{La ecuación (5.84)} &: \\ m_4\eta_{ck} &= m_3 - m_5\eta_{kk} \\ \text{La ecuación (5.85)} &: \\ m_4\eta_{ca} &= m_2 - m_5\eta_{ka} \\ \text{La ecuación (5.87)} &: \\ \eta_{kk} &= \frac{\eta_{ck}}{n_3 + n_1\eta_{ck}} \\ \text{La ecuación (5.88)} &: \\ (1-\phi n_1)\eta_{ca} &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2\end{aligned}$$

[D1] Función de política del consumo y del capital: para solucionar el sistema de ecuaciones ((5.84), (5.85), (5.87) y (5.88)) donde las variables son los coeficientes de la funcion de política del consumo y de la función de estado se requiere reducir las ecuaciones. En primer lugar, de la ecuación (5.84) se despeja η_{ck} y se reemplaza en la ecuación (5.87) para encontrar el valor de η_{kk}.

$$\begin{aligned}\text{De la ecuación (5.84)} &: \\ m_4\eta_{ck} &= m_3 - m_5\eta_{kk} \\ \eta_{ck} &= \frac{1}{m_4}(m_3 - m_5\eta_{kk}) \end{aligned} \tag{5.89}$$

$$\begin{aligned}\text{De la ecuación (5.87)} &: \\ \eta_{kk} &= \frac{\eta_{ck}}{n_3 + n_1\eta_{ck}} \\ n_3\eta_{kk} + n_1\eta_{ck}\eta_{kk} &= \eta_{ck} \\ n_3\eta_{kk} &= \underbrace{\eta_{ck}}_{\text{Ecu. (5.89)}}(1 - n_1\eta_{kk}) \\ n_3\eta_{kk} &= \frac{1}{m_4}(m_3 - m_5\eta_{kk})(1 - n_1\eta_{kk}) \\ m_4 n_3\eta_{kk} &= (m_3 - m_5\eta_{kk})(1 - n_1\eta_{kk}) \\ m_4 n_3\eta_{kk} &= m_3 - m_3 n_1\eta_{kk} - m_5\eta_{kk} + m_5 n_1\eta_{kk}^2 \end{aligned}$$

$$\underbrace{m_5 n_1}_{=a}\eta_{kk}^2 + \underbrace{-(m_3 n_1 + m_5 + m_4 n_3)}_{=b}\eta_{kk} + \underbrace{m_3}_{=c} = 0 \tag{5.90}$$

$$a\eta_{kk}^2 + b\eta_{kk} + c = 0 \tag{5.91}$$

La ecuación (5.91) tiene dos soluciones:

$$\eta_{kk_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dado que se requiere que el capital sea estacionario, entonces η_{kk} debe ser menor a uno en valor absoluto; es decir, $\eta_{kk} \in]-1, 1[$.

Cuadro 5.7: Valor de $\eta_{kk_{1,2}}$

θ	β	δ	γ_n	α	η_{kk_1}	η_{kk_2}
2	0.984	0.025	0.25	0.333	1.0897	0.9326

El valor de η_{kk} que se elige es $\eta_{kk2} = 0.9326$. Dado el valor de η_{kk}, entonces se puede encontrar η_{ck} de la ecuación (5.84):

$$\eta_{ck} = \frac{1}{m_4}(m_3 - m_5\eta_{kk}) \tag{5.92}$$

Para encontrar el valor del coeficiente η_{ka} se despeja η_{ca} de la ecuación (5.85) y se reemplaza en la ecuación (5.88):

$$\begin{aligned}
\text{De la ecuación (5.85)} &: \\
m_4\eta_{ca} &= m_2 - m_5\eta_{ka} \\
\eta_{ca} &= \frac{1}{m_4}(m_2 - m_5\eta_{ka}) \qquad (5.93)\\
\text{De la ecuación (5.88)} &: \\
(1-\phi n_1)\underbrace{\eta_{ca}}_{\text{Ecu. (5.93)}} &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2 \\
(1-\phi n_1)\left(\frac{1}{m_4}(m_2 - m_5\eta_{ka})\right) &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2 \\
\frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1) - \frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1)\eta_{ka} &= \eta_{ka}(n_1\eta_{ck} + n_3) - \phi n_2 \\
-\eta_{ka}\left[\frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1) + n_1\eta_{ck} + n_3\right] &= -\phi n_2 - \frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1) \\
\eta_{ka}\left[\frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1) + n_1\eta_{ck} + n_3\right] &= \phi n_2 + \frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1) \\
\eta_{ka} &= \frac{\phi n_2 + \frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1)}{\frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1) + n_1\eta_{ck} + n_3} \qquad (5.94)
\end{aligned}$$

Finalmente, η_{ca} se obtiene de la ecuación (5.85):

$$\begin{aligned}
m_4\eta_{ca} &= m_2 - m_5\eta_{ka} \\
\eta_{ca} &= \frac{1}{m_4}(m_2 - m_5\eta_{ka}) \qquad (5.95)
\end{aligned}$$

Hasta aquí se han encontrado los valores de los coeficientes η_{ck}, η_{ca}, η_{kk} y η_{ka}, los cuales permiten definir la solución del consumo y del capital; es decir, la función de política del consumo y la función de estado del modelo[1]:

$$\widehat{k}_{t+1} = \underbrace{\eta_{kk}}_{0.9326}\widehat{k}_t + \underbrace{\eta_{ka}}_{0.1618}\widehat{a}_t \quad (5.96)$$

$$\widehat{c}_t = \underbrace{\eta_{ck}}_{0.5205}\widehat{k}_t + \underbrace{\eta_{ca}}_{0.4945}\widehat{a}_t \quad (5.97)$$

[D2] Función de política de las demás variables: la función de política del producto se obtiene de reemplazar la solución del consumo en la ecuación (5.71).

$$\begin{aligned}
&\text{De la ecuación (5.71)} : \\
&\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{c}_t \\
&\text{Se reemplaza la solución de } \widehat{c}_t : \\
&\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\alpha}{1+m_1}\right](\eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t) \\
&\left[\frac{m_1+\alpha}{1+m_1}\right]\widehat{y}_t = (1 - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ca})\widehat{a}_t + (\alpha - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ck})\widehat{k}_t \\
&\widehat{y}_t = \underbrace{\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right](1 - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ca})}_{\eta_{ya}}\widehat{a}_t + \underbrace{\left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right](\alpha - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ck})}_{\eta_{yk}}\widehat{k}_t \\
&\widehat{y}_t = \eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t \quad (5.98)
\end{aligned}$$

De otro lado, la función de política del trabajo se obtiene de reemplazar la solución del consumo y del producto en la ecuación (5.64):

$$\begin{aligned}
&\text{De la ecuación (5.71)} : \\
&(1+m_1)\widehat{h}_t = \widehat{y}_t - \widehat{c}_t \\
&\text{Reemplazando} : \text{ la solución de } \widehat{c}_t \text{ y } \widehat{y}_t \\
&(1+m_1)\widehat{h}_t = (\eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t) - (\eta_{ca}\widehat{a}_t + \eta_{ck}\widehat{k}_t) \\
&(1+m_1)\widehat{h}_t = (\eta_{ya} - \eta_{ca})\widehat{a}_t + (\eta_{yk} - \eta_{ck})\widehat{k}_t \\
&\widehat{h}_t = \left(\frac{\eta_{ya}-\eta_{ca}}{1+m_1}\right)\widehat{a}_t + \left(\frac{\eta_{yk}-\eta_{ck}}{1+m_1}\right)\widehat{k}_t \\
&\widehat{h}_t = \eta_{ha}\widehat{a}_t + \eta_{hk}\widehat{k}_t \quad (5.99)
\end{aligned}$$

Además, el salario real se obtiene de reemplazar la solución del producto y del trabajo en la demanda de trabajo (ecuación (5.57)).

[1] Los valores de estos coeficientes como de la solución de las demás variables endógenas se encuentran en Campbell_Lvariable.m

$$\begin{aligned}
\text{De la ecuación (5.57)} &\quad : \\
\widehat{w}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{h}_t \\
\text{Reemplazando} &\quad : \quad \text{la solución de } \widehat{y}_t \text{ y } \widehat{h}_t \\
\widehat{w}_t &= (\eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t) - (\eta_{ha}\widehat{a}_t + \eta_{hk}\widehat{k}_t) \\
\widehat{w}_t &= (\eta_{ya} - \eta_{ha})\widehat{a}_t + (\eta_{yk} - \eta_{hk})\widehat{k}_t \\
\widehat{w}_t &= \eta_{wa}\widehat{a}_t + \eta_{wk}\widehat{k}_t
\end{aligned} \tag{5.100}$$

La inversión se obtiene al reemplazar la solución del producto y del consumo en la ecuación del equilibrio de mercado de bienes:

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t + \frac{i_{ss}}{y_{ss}}\widehat{i}_t \\
\widehat{i}_t &= \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\widehat{y}_t - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\widehat{c}_t) \\
\text{Reemplazando} &\quad : \quad \text{la solución de } \widehat{y}_t \text{ y } \widehat{c}_t \\
\widehat{i}_t &= \frac{y_{ss}}{i_{ss}}((\eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t) - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}(\eta_{ca}\widehat{a}_t + \eta_{ck}\widehat{k}_t)) \\
\widehat{i}_t &= \frac{y_{ss}}{i_{ss}}((\eta_{yk} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})\widehat{k}_t + (\eta_{ya} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})\widehat{a}_t) \\
\widehat{i}_t &= \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\eta_{yk} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})\widehat{k}_t + \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\eta_{ya} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})\widehat{a}_t \\
\widehat{i}_t &= \eta_{ik}\widehat{k}_t + \eta_{ia}\widehat{a}_t
\end{aligned} \tag{5.101}$$

Finalmente, la tasa de interés real se obtiene de reemplazar la solución del producto y de capital en la demanda del capital.

$$\begin{aligned}
\text{De la ecuación (5.62)} &\quad : \\
\widehat{r}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{k}_t \\
\text{Reemplazando} &\quad : \quad \text{la solución de } \widehat{y}_t \\
\widehat{r}_t &= (\eta_{ya}\widehat{a}_t + \eta_{yk}\widehat{k}_t) - \widehat{k}_t) \\
\widehat{r}_t &= (\eta_{yk} - 1)\widehat{k}_t + \eta_{ya}\widehat{a}_t \\
\widehat{r}_t &= \eta_{rk}\widehat{k}_t + \eta_{ra}\widehat{a}_t
\end{aligned} \tag{5.102}$$

En el cuadro [5.8] se menciona la solución (funciones de política y de estado) del sistema de ecuaciones log-lineal.

Cuadro 5.8: Funciones de política y de estado

Solución	Coeficientes	
$\widehat{k}_t = \eta_{kk}\widehat{k}_t + \eta_{ka}\widehat{a}_t$	$\eta_{kk_{1,2}} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$\eta_{ka} = \frac{\phi n_2+\frac{m_2}{m_4}(1-\phi n_1)}{\frac{m_5}{m_4}(1-\phi n_1)+n_1\eta_{ck}+n_3}$
$\widehat{c}_t = \eta_{ck}\widehat{k}_t + \eta_{ca}\widehat{a}_t$	$\eta_{ck} = \frac{1}{m_4}(m_3 - m_5\eta_{kk})$	$\eta_{ca} = \frac{1}{m_4}(m_2 - m_5\eta_{ka})$
$\widehat{y}_t = \eta_{yk}\widehat{k}_t + \eta_{ya}\widehat{a}_t$	$\eta_{yk} = \left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right](\alpha - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ck})$	$\eta_{ya} = \left[\frac{1+m_1}{m_1+\alpha}\right](1 - \frac{1-\alpha}{1+m_1}\eta_{ca})$
$\widehat{h}_t = \eta_{hk}\widehat{k}_t + \eta_{ha}\widehat{a}_t$	$\eta_{hk} = \left(\frac{\eta_{yk}-\eta_{ck}}{1+m_1}\right)$	$\eta_{ha} = \left(\frac{\eta_{ya}-\eta_{ca}}{1+m_1}\right)$
$\widehat{w}_t = \eta_{wk}\widehat{k}_t + \eta_{wa}\widehat{a}_t$	$\eta_{wk} = \eta_{yk} - \eta_{hk}$	$\eta_{wa} = \eta_{ya} - \eta_{ha}$
$\widehat{i}_t = \eta_{ik}\widehat{k}_t + \eta_{ia}\widehat{a}_t$	$\eta_{ik} = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\eta_{yk} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ck})$	$\eta_{ia} = \frac{y_{ss}}{i_{ss}}(\eta_{ya} - \frac{c_{ss}}{y_{ss}}\eta_{ca})$
$\widehat{r}_t = \eta_{rk}\widehat{k}_t + \eta_{ra}\widehat{a}_t$	$\eta_{rk} = \eta_{yk} - 1$	$\eta_{ra} = \eta_{ya}$

Solución obtenida de Dynare

El sistema de ecuaciones no-lineal descrito en el cuadro [5.2] se ha colocado en el archivo .mod "Campbell_Lvariable_Dynare_nolineal_log5". Este archivo, que contiene el modelo, tiene dos características que vale la pena comentar: la primera es que las variables están en logarítmo. El objetivo de ello es que cuando Dynare linealice el sistema aparezca la variable en log-desviaciones; es decir, $\widehat{x}_t = lnx_t - lnx_{ss}$. Cabe mencionar que bajo este tipo de variable, Dynare mostrará la solución (función de política y de estado) y la función impulso-respuesta en términos de $\widehat{x}_t$. La segunda característica es que el modelo que se ha escrito en este archivo es no-lineal y se le ha pedido a Dynare que linealice el sistema por medio del comando "order=1" en "stoch_simul". El cuadro [5.9] muestra la solución del modelo tal cual Dynare brinda en la pantalla de Matlab.

Cuadro 5.9: Función de política y de estado

	cc	ii	yy	kk	hh	rr	ww	aa
Constant	-0.1718	-1.5471	0.0535	2.1418	-0.9890	-3.1879	0.6376	0
kk(-1)	0.5205	-1.6972	0.0730	0.9326	-0.3898	-0.9270	0.4628	0
aa(-1)	0.4698	6.1500	1.6159	0.1538	0.9983	1.6159	0.6176	0.95
e	0.4945	6.4737	1.7009	0.1618	1.0508	1.7009	0.6501	1

Nota: los resultados se han obtenido de "Campbell_Lvariable_Dynare_nolineal_log5.mod"

Para leer correctamente el cuadro [5.9] se debe de tomar en cuenta las siguientes consideraciones. En primer lugar, cada columna representa la función de política de la variable del encabezado. Por ejemplo, la segunda columna es la función de política del consumo, la tercera columna es la función de política de la inversión y así sucesivamente. Cabe destacar que la cuarta columna es la ecuación de estado.

En segundo lugar, las variables endógenas del encabezado del cuadro [5.9] expresan cada variable en logarítmo. Por ejemplo, el consumo cc es igual al lnc_t, de igual manera para el producto: $yy = lny_t$. En el caso del capital "kk" este es igual al logarítmo del capital en "t+1"; es decir, $kk = lnk_{t+1}$. Esto se debe a que en el archivo mod el capital en "t" se ha escrito como $kk(-1)$, de otro modo Dynare entendería que esta variable es

de control cuando en realidad es de estado.

En tercer lugar, la “constante” en la segunda fila del cuadro [5.9] representa el logarítmo de cada una de las variables en estado estacionario. Por ejemplo, en la ecuación del consumo se tiene que $-0.1718 = lnc_{ss}$, lo cual a su vez permite encontrar el estado estacionario de la variable en niveles: $c_{ss} = e^{-0.1718} = 0.8421$. En cuarto lugar, en la primera columna del cuadro [5.9] está la variable de estado y la variable exógena. La variable $kk(-1)$ es igual a $\widehat{k}_t = lnk_t - lnk_{ss}$; además, $aa(-1) = \widehat{a}_{t-1} = lna_{t-1} - lna_{ss}$ y e representa el choque de productividad ϵ_t. Con todas estas consideraciones se reexpresa el cuadro [5.9], cuyos resultados se muestran en el cuadro [5.10].

Cuadro 5.10: Función de política y de estado

	$ln(c_t)$	$ln(i_t)$	$ln(y_t)$	$ln(k_{t+1})$	$ln(h_t)$	$ln(r_t)$	$ln(w_t)$	$ln(a_t)$
constante	-0.1718	-1.5471	0.0535	2.1418	-0.9890	-3.1879	0.6376	0
$\widehat{k}_t$	0.5205	-1.6972	0.0730	0.9326	-0.3898	-0.9270	0.4628	0
$\widehat{a}_{t-1}$	0.4698	6.1500	1.6159	0.1538	0.9983	1.6159	0.6176	0.95
e_t	0.4945	6.4737	1.7009	0.1618	1.0508	1.7009	0.6501	1

Nota: los resultados se han obtenido de “Campbell_Lvariable_nolineal_log5.mod”

En el cuadro [5.10] se describe la solución del sistema log-lineal. Las ecuaciones se leen de la siguiente manera, por ejemplo para el caso del consumo se tiene:

$$ln(c_t) = -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4698\widehat{a}_{t-1} + 0.4945e_t \tag{5.103}$$

También se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4698\widehat{a}_{t-1} + 0.4945e_t \\ ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945(\frac{0.4698}{0.4945}\widehat{a}_{t-1} + e_t) \\ ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945(0.95\widehat{a}_{t-1} + e_t) \\ ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945(\widehat{a}_t) \\ ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \\ ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \end{aligned} \tag{5.104}$$

La constante -0.1718 representa el logarítmo del consumo en estado estacionario $ln(c_{ss})$. Considerando esto último en la ecuación (5.104) se tiene:

$$\begin{aligned} ln(c_t) &= -0.1718 + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \\ ln(c_t) &= ln(c_{ss}) + 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \\ ln(c_t) - ln(c_{ss}) &= 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \\ \widehat{c}_t &= 0.5205\widehat{k}_t + 0.4945\widehat{a}_t \end{aligned} \tag{5.105}$$

El coeficiente 0.5205 y 0.4945 representa elasticidad del consumo ante el capital y la productividad respectivamente. Es decir, un incremento de 1 por ciento en el capital produce que el consumo se incremente en 0.5205 por ciento.

5.3. Análisis de la solución del modelo

5.3.1. Análisis de los coeficientes de la solución

En el análisis de los coeficientes de la solución es útil considerar que en la solución generica del modelo la variable de estado $\widehat{k}_t$ representa el estado de la economía en "t", mientras que la variable $\widehat{a}_t$ representa el choque transitorio ($\phi < 1$) a la cual la economía podría estar sujeta en "t".

$$\widehat{x}_t = \eta_{xk} \underbrace{\widehat{k}_t}_{\text{Estado de la economía}} + \eta_{xa} \underbrace{\widehat{a}_t}_{\text{Choque transitorio}}$$

Efectos de δ

La tasa de depreciación δ tiene un rol importante en el comportamiento de los coeficientes de la solución del modelo (función de política y de estado). Por ejemplo, la elasticidad inversión-capital η_{ik} pasa de ser negativa a positiva a medida que δ se incrementa. Los diferentes valores de $\delta \in [0, 1]$ representan diversos casos. El caso extremo es cuando δ es igual a uno, el cual corresponde a uno de los supuestos del modelo de Long y Plosser (1983). Este supuesto indica que el capital se deprecia totalmente en el mismo periodo produciendo que el stock de capital se convierta en un flujo sostenido únicamente por la inversión. Esto último se observa de la ley de movimiento de capital $\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$, la cual bajo $\delta = 1$ se convierte en $\widehat{k}_{t+1} = \widehat{i}_t$.

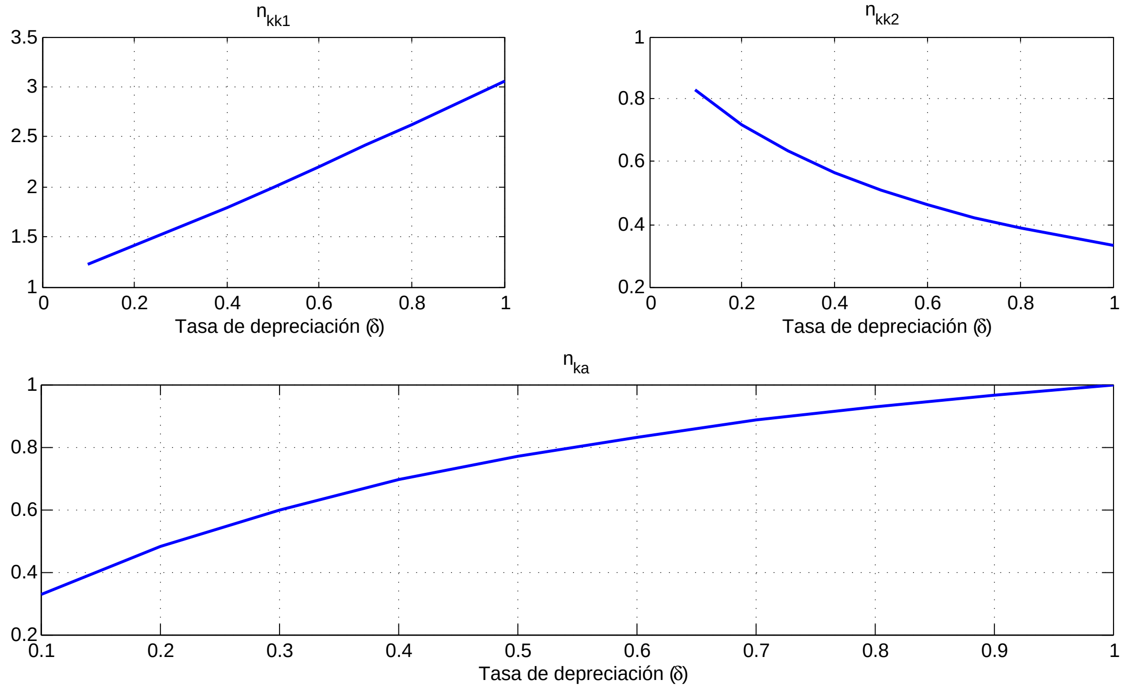
[A] Efectos sobre el capital:

1. La persistencia del capital; es decir, su coeficiente estable (menor a 1) η_{kk2} disminuye a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.1]). Al incrementarse la tasa de depreciación, el stock de capital del siguiente periodo será menor. El caso extremo es ejemplificado por el modelo de Long y Plosser (1983), en el cual $\delta = 1$; en este caso, el stock de capital esta compuesto por el flujo de bienes de inversión, no se acumula capital del periodo previoy y por tanto el capital en menor. Todo ello produce que el capital este muy poco autocorrelacionado, lo cual se puede observar en el valor decreciente de η_{kk2} a medida que δ se fortalece. Dado que la acumulación de capital tiene un rol trasnversal en la respuesta óptima del agente representativo en todas las variables endógenas, entonces el impacto de la depreciación se extenderá en la regla de decisión (funciones de política) de todas las variables.

2. La elasticidad del capital ante la productividad η_{ka} se fortalece a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.1]). Para entender esta elasticidad es importante analizar la ley de movimiento de capital: $\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$. Esta ecuación sugiere que el capital de mañana esta afectado por el stock de capital de hoy y por la inversión cada uno ponderado por $(1-\delta)$ y δ. Entre estas dos variables, la inversión es la que reacciona ante un choque de productividad en "t": un incremento en $\widehat{a}_t$ eleva la inversión $\widehat{i}_t$, cuya elasticidad es mayor a uno (ver figura [5.2]). Por tanto, un incremento de la productividad eleva el capital en "t+1" por medio de la inversión; es decir, la η_{ka} es positivo. De otro lado, un incremento de la depreciación

fortalece el impacto de la inversión sobre el capital en "t+1" ($\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$), lo cual sugiere que η_{ka} se fortalece a medida que δ se incrementa.

Figura 5.1: Efectos de δ sobre los coeficientes del capital



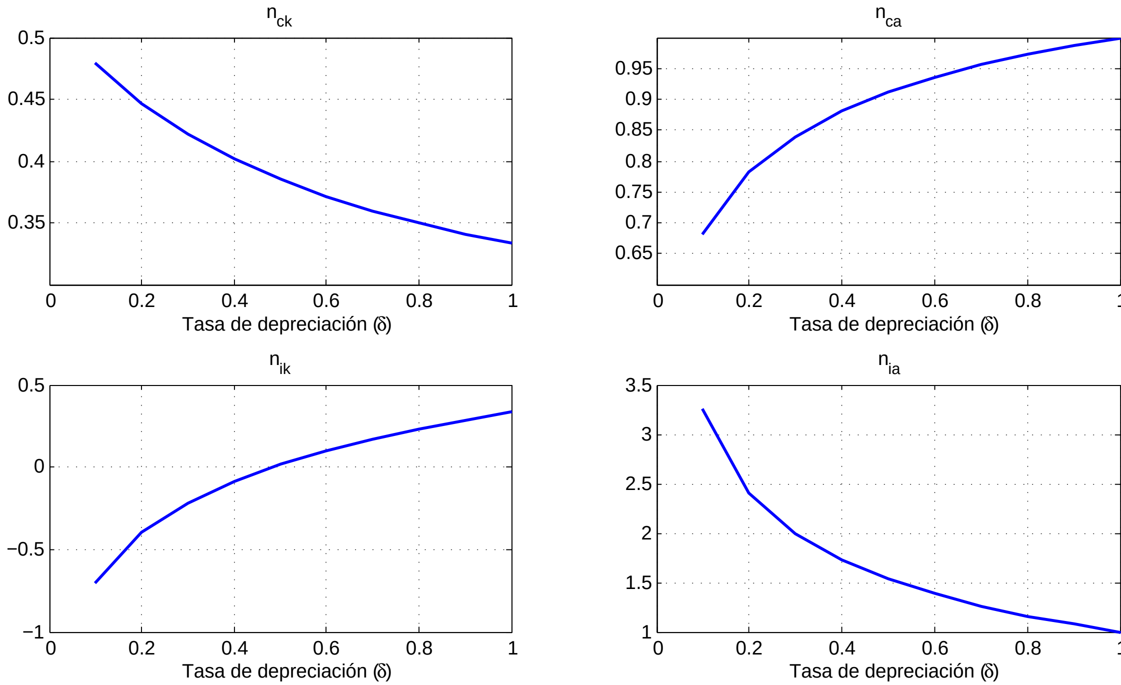
Nota: Todos los gráficos de la sección "Análisis de los coeficientes de la solución" se obtienen del m−file "Sensibilidad_parametros.m"

[B] Efectos sobre el consumo y la inversión:

1. La elasticidad del **consumo** ante el capital η_{ck} disminuye a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.2]). En el contexto de tasa de depreciación baja, η_{ck} es alta debido a que el agente responde reduciendo su inversión (η_{ik} negativa) por lo cual deja recursos para el consumo. Es decir, el agente representativo encuentra óptimo reducir su inversión e incrementar su consumo cuando la depreciación es baja. Sin embargo, a medida que δ se incrementa, η_{ck} se debilita debido a que el agente representativo está dispuesto a orientar más recursos a la inversión porque el capital se deprecia rapidamente.

2. La elasticidad de la **inversión** ante el capital η_{ik} pasa de ser negativo a positivo a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.2]). Si la depreciación es pequeña entonces no se necesita mucha inversión para aumentar significativamente el capital, por lo cual el agente representativo encuentra óptimo reducir su inversión ante un incremento del stock de capital en "t", lo cual se refleja en una elasticidad negativa. Sin embargo, a medida que δ se incrementa, se requiere mayor inversión para reponer el capital depreciado e incrementar el stock de capital, lo cual se refleja en un fortalecimiento de dicha elasticidad η_{ik}; es más, esta elasticidad que

Figura 5.2: Efectos de δ sobre los coeficientes del consumo e inversión



para niveles bajos de depreciación es negativa pasa a ser positiva desde un $\delta = 0.5$ apróximadamente.

3. La elasticidad del **consumo** ante la productividad η_{ca} se fortalece a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.2]). De otro lado, se observa que la elasticidad del **inversión** ante la productividad η_{ia} se debilita a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.2]). Para niveles pequeños de la tasa de depreciación, la respuesta del agente representativo ante un choque transitorio $\widehat{a}_t$ es responder fuertemente en el ahorro (inversión) y dejar que el consumo reaccione debilmente. Esto se refleja en los valores altos de η_{ia} y bajos de η_{ca} para valores de δ pequeños. Esto tiene sentido con la teoría del consumidor que indica que el agente prefiere suavizar consumo ante choques transitorios. De otro lado, se observa que una mayor tasa de depreciación incentiva a que el agente representativo destine el efecto riqueza producido por el choque de productividad a un mayor consumo y reduzca su inversión. Esto se refleja en el fortalecimiento de η_{ca} y debilitamiento de η_{ia}. Cabe mencionar que η_{ia} tiene más volatilidad que η_{ca}. Para valores de $\delta \in [0.025 - 1]$, η_{ia} toma valores desde $[6.47 - 1]$; en cambio η_{ca} tiene valores más acotados $[0.49 - 1]$ para el mismo rango de los valores de δ.

[C] Efectos sobre el producto y la tasa de interés:

1. La elasticidad del **producto** ante el capital η_{yk} se fortalece a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.3]). Un incremento del capital, manteniendo fijo el trabajo, incrementa la producción por medio de la función de producción ($\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t$) independientemente del valor de δ; lo cual

se refleja en el signo positivo de η_{yk}. Además, una mayor tasa de depreciación reduce el stock de capital y por ende incrementa la productividad marginal del capital (por su naturaleza decreciente en el capital), lo cual se refleja en el incremento de la elasticidad producto-capital η_{yk} a medida que δ crece (y que se reduce capital).

2. La elasticidad del **producto** ante la productividad η_{ya} se debilita a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.3]). El choque de productividad incrementa la producción por medio de la función de producción, lo cual se refleja en el signo positivo de η_{ya}. Sin embargo, esta elasticidad se reduce a medida que aumenta δ debido que el incremento de la depreciación reduce el stock del capital lo cual mitiga parcialmente el efecto de la productividad. Entonces, el choque de productividad tendrá menor efecto sobre el producto a medida que el stock de capital se reduzca o de manera equivalente a medida que δ se incremente.

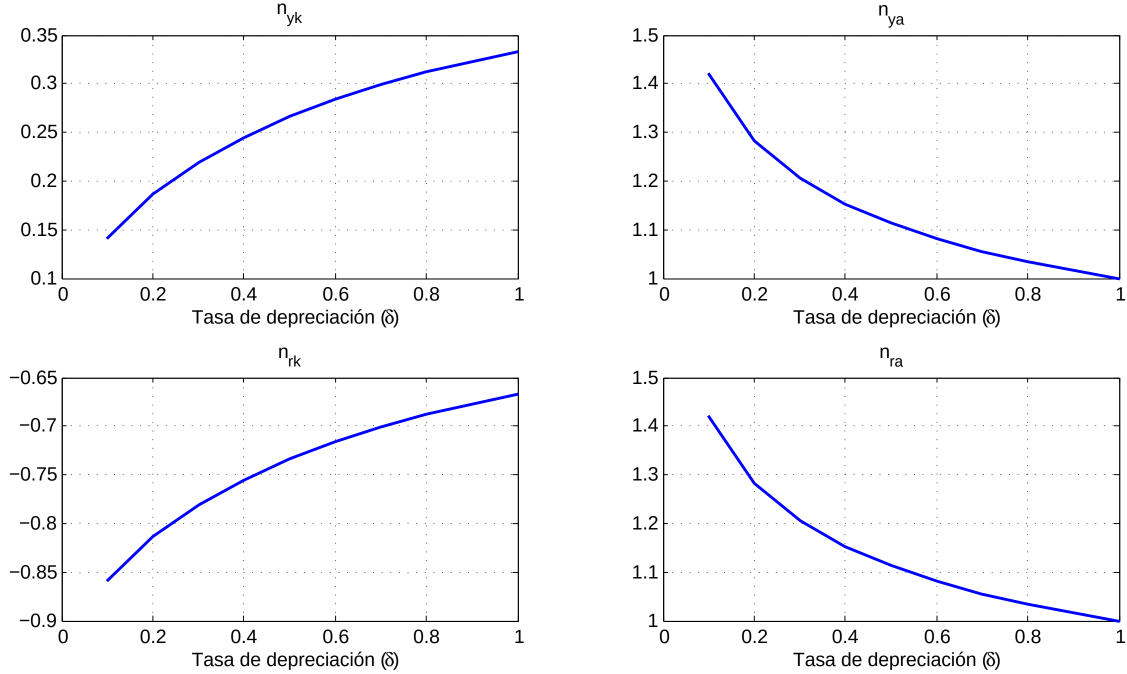
3. La elasticidad de la **tasa de interés** ante el capital η_{rk} es negativa para cualquier valor de la tasa de depreciación y se reduce a medida que δ se incrementa (ver la figura [5.3]). El signo de esta elasticidad refleja la demanda del capital (pendiente negativa con respecto al capital) y los valores de esta elasticidad reflejan el equilibrio del mercado de capital. La forma correcta de leer los valores de η_{rk} es la siguiente: para valores bajos de δ, un incremento de la oferta de capital (vertical) produce una reducción de la tasa de interés (manteniendo la demanda de capital invariante). En este escenario, no importa la magnitud de la expansión de la oferta (pequeña o significativa), en cualquier caso la tasa de interés siempre se reducirá. Esto último indica que la elasticidad tasa de interés - capital η_{rk} tiene signo negativo. De otro lado, si la tasa de depreciación es pequeña entonces, la expansión de la oferta de capital será significativa por lo que inducirá una reducción de la tasa de interés importante, lo cual se refleja en una elasticidad tasa de interés - capital grande. Sin embargo, si la tasa de depreciación es muy alta, entonces la expasión de la oferta de capital será reducida y por tanto la tasa de interés caería poco. Este análisis se refleja en el comportamiento decreciente de η_{rk} ante incrementos de δ.

4. La elasticidad de la **tasa de interés** ante la productividad η_{ra} se debilita a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.3]). En este caso el choque de productividad afecta la demanda de capital (más no la oferta de capital). Un incremento de la productividad, incentiva la demanda de capital y por tanto se incrementa la tasa de interés real; es decir, la elasticidad de la tasa de interés a la productividad η_{ra} es positiva tal como se observa en la figura [5.3] independientemente del valor de δ. Sin embargo, la magnitud de esta elasticidad depende del valor de δ. Cuando la tasa de depreciación se incrementa reduce el stock de capital en "t", lo cual reduce la producción en ese mismo periodo y por tanto hace que la demanda de capital se contraiga ($\widehat{r}_t = \widehat{y}_t - \widehat{k}_t$) mitigando parcialmente el efecto de la productividad. Por ello el valor de η_{ra}, aunque se mantiene positivo, se reduce a medida que se incrementa δ.

[D] Efectos sobre el trabajo y el salario:

1. La elasticidad del **trabajo** ante el capital η_{hk} es negativa y converge a cero a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.4]). El signo de esta elasticidad de obtiene del siguiente análisis: un incremento del capital produce un efecto

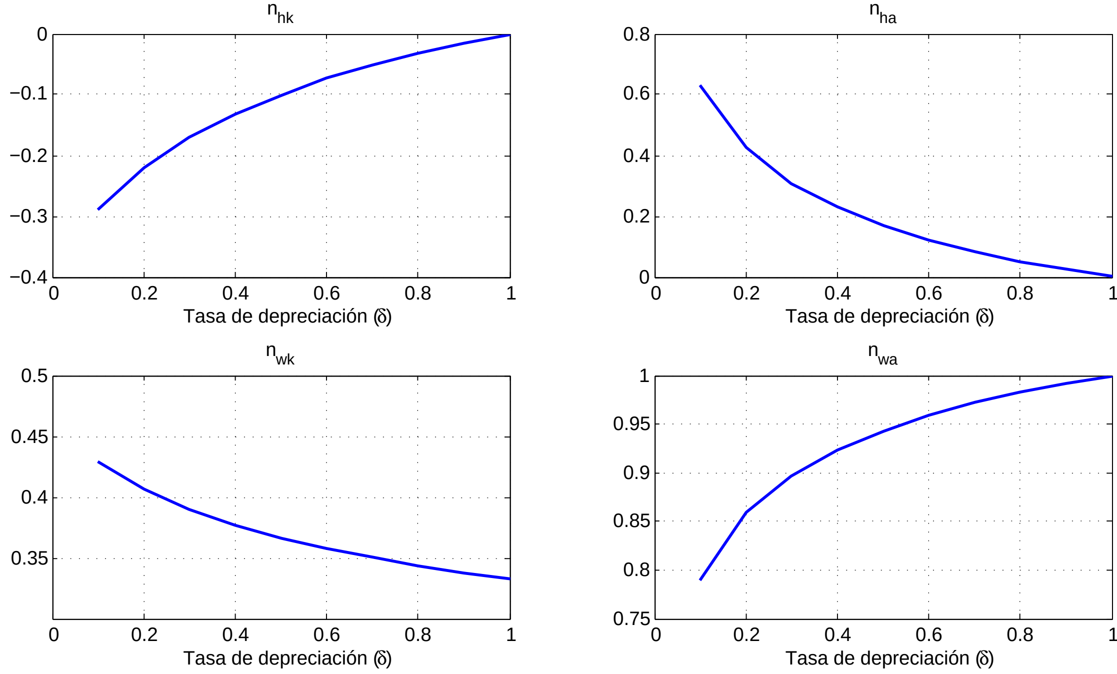
Figura 5.3: Efectos de δ sobre los coeficientes del producto y tasa de interés



ingreso (que se refleja en la restricción presupuestaria de la familia). Dicho efecto ingreso permite a la familia incrementar su consumo de ocio y por ende reducir su oferta de trabajo. Como resultado se observa que un incremento del capital conlleva a una reducción del trabajo vía efecto riqueza. Esta relación inversa se observa en el signo de η_{hk}. De otro lado, si la tasa de depreciación se incrementa entonces el stock de capital será menor y por tanto el efecto riqueza será menor. Dado un efecto riqueza debilitado, entonces el ocio se expande pero en menor proporción y la oferta de trabajo se reduce pero en menor magnitud. El caso extremo es cuando el efecto riqueza es cero porque la depreciación es total ($\delta = 1$) lo cual lleva a que el ocio y el trabajo no reaccionen. Esto se observa en el comportamiento de η_{hk}.

2. La elasticidad del **salario real** ante el capital η_{wk} se reduce a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.4]). Esta observación amerita dos comentarios: en primer lugar, un incremento del capital incrementa la producción y por ende expande la demanda de trabajo ($\widehat{h}_t = \widehat{y}_t - \widehat{w}_t$). Bajo una oferta de trabajo invariante, el incremento de la demanda de trabajo eleva el salario real. Entonces se puede deducir que un incremento del capital induce un incremento del salario real; es decir, la elasticidad salario real - capital η_{wk} es positiva tal como se observa en la figura [5.4]. En segundo lugar, la tasa de depreciación influye sobre el stock de capital y por ende sobre la elasticidad salario real - capital η_{wk}. El incremento de capital con un δ mayor inducirá a que dicho incremento sea menor y por tanto la demanda se expandirá pero en menor medida. El resultado de ello es que el salario real se incrementa pero no tan fuerte como antes, lo cual sugiere que la elasticidad salario real - capital η_{wk} sigue positiva pero mas pequeña.

Figura 5.4: Efectos de δ sobre los coeficientes del trabajo y salario

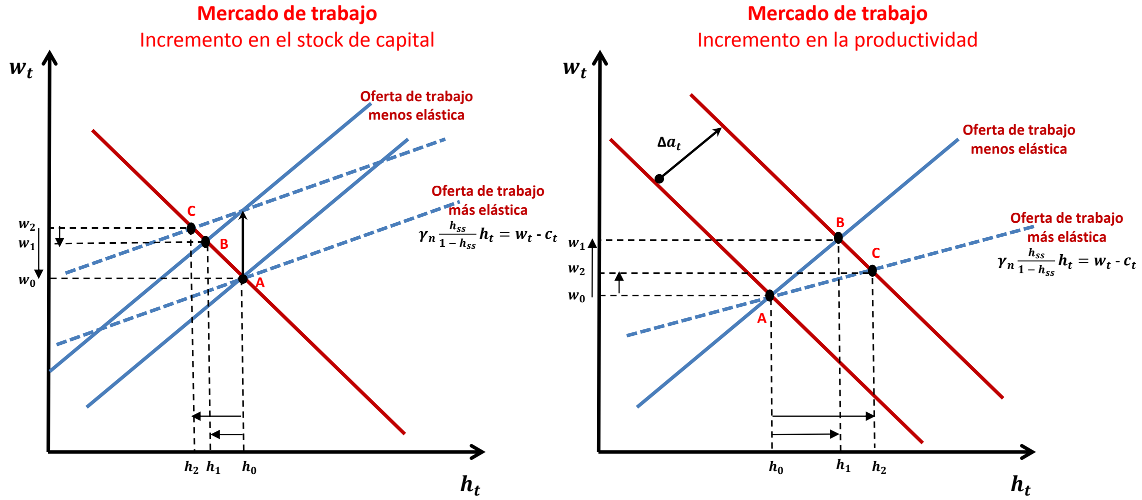


3. La elasticidad del **salario real** ante la productividad η_{wa} se fortalece a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.4]). Además, la elasticidad del **trabajo** ante la productividad η_{ha} es positiva y converge a cero a medida que la tasa de depreciación se incrementa (ver la figura [5.4]). Un choque de productividad afecta directamente la demanda de trabajo e indirectamente la oferta de trabajo. Para un nivel de depreciación dado, se observa que el choque de productividad incrementa la demanda de trabajo y por medio del incremento del consumo se contrae la oferta de trabajo. El resultado es que el trabajo y el salario real de equilibrio se incrementa. En este escenario, un incremento de la depreciación inducirá un mayor consumo debido a que la inversión se reduce por el aumento de la depreciación. Este incremento adicional del consumo reduce la oferta de trabajo, incrementando un poco más el salario real y reduciendo el trabajo. En este nuevo equilibrio el salario real es más alto y el trabajo es mayor que el inicial pero en menor medida. Es decir, la elasticidad salario-productividad se ha incrementado pero la elasticidad trabajo-productividad se ha reducido ante una mayor tasa de depreciación.

Efectos de γ_n

La elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo $(1/\gamma_n)$ o también conocida como la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo tiene un rol importante en la transmisión del choque de productividad. Como se puede observar en la figura [5.5], mientras más elastica sea la oferta, entonces el choque de productividad que expande la demanda de trabajo afecta en mayor medida el trabajo y en menor magnitud al salario real (ver figura [5.5], gráfico de la derecha). Esto es importante porque permite obtener mayor volatilidad

Figura 5.5: Elasticidad de la oferta de trabajo



del trabajo en comparación con el salario, lo cual es avalado por los datos.

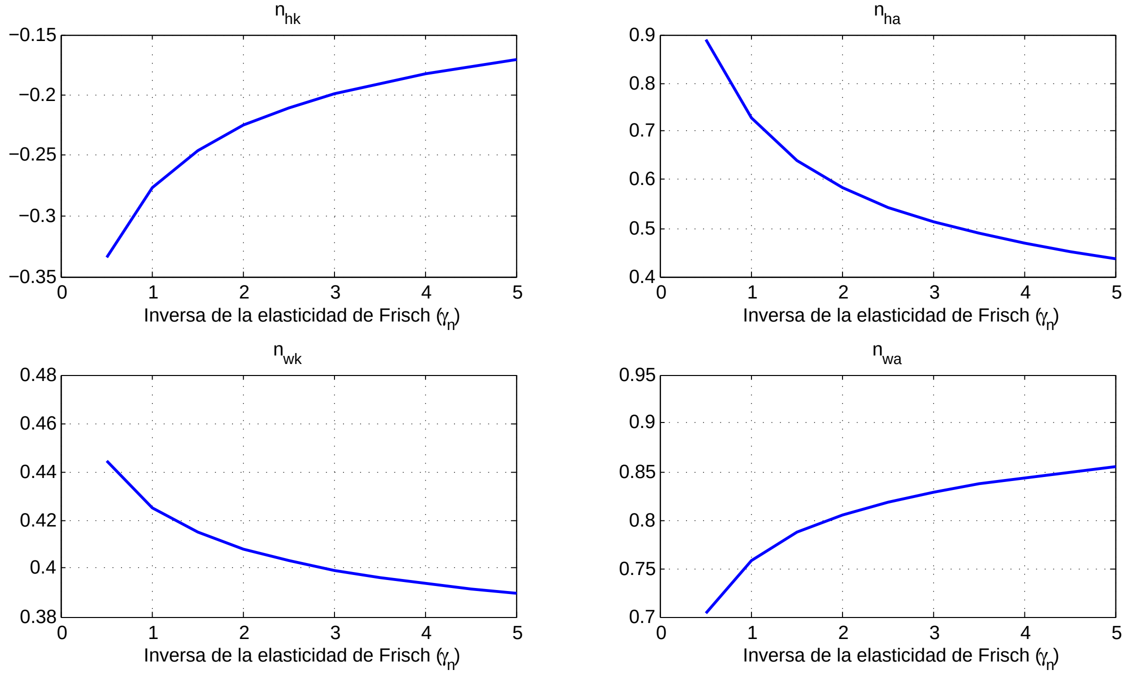
En esta sección se analiza la importancia que tiene γ_n en el comportamiento de los coeficientes de las funciones de política y de estado. Cabe mencionar que para leer correctamente los gráficos se considera que a medida que en el eje horizontal se acera a cero entonces la elasticidad de Frisch aumenta.

[A] Efectos sobre el trabajo y el salario:

1. La elasticidad del **trabajo** ante el capital η_{hk} es negativa y aumenta a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [5.6]). Además, la elasticidad del **salario real** ante el capital η_{hk} es positiva y aumenta a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [5.6]). Como se mencionó en párrafos previos, un incremento del capital produce un efecto riqueza, por medio del incremento de los ingresos de la familia, que permite aumentar el consumo de ocio y como consecuencia reducir la oferta de trabajo. Esta reducción, bajo la consideración que la demanda de trabajo no se mueve, produce un alza en el salario real y una reducción en el empleo. Ambos efectos se reflejan en el signo negativo de η_{hk} y en el signo positivo de η_{wk}. En el caso que la oferta de trabajo sea más elástica, entonces el mismo incremento del capital produce que el nuevo equilibrio refleje un mayor incremento del salario real y una reducción mayor del empleo; es decir, η_{wk} y η_{wk} se hacen más fuertes cuando se incrementa la elasticidad. Esto se debe a que el consumidor está más dispuesto a sustituir trabajo hoy por mañana, esta disposición hace que se desprenda del ocio de mañana por más ocio de hoy y por tanto una reducción mayor en las horas trabajadas hoy (ver figura [5.5], gráfico de la izquierda).

2. La elasticidad del **trabajo** ante la productividad η_{ha} es positiva y aumenta a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [5.6]). Además, la elasticidad del **salario real** ante la productividad η_{ha} es positiva y disminuye a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [5.6]). Un incremento temporal en la

Figura 5.6: Efectos de γ_n sobre los coeficientes del trabajo y salario



productividad efecta directamente la demanda de trabajo hacia el alza. Esta expansión se refleja en un aumento del salario real y el empleo, lo cual justifica el signo positivo de η_{ha} y η_{wa}. Sin embargo, la elasticidad de la oferta de trabajo controla la magnitud de η_{ha} y η_{wa}. En el escenario que la oferta de trabajo es muy elástica, un incremento de la productividad producirá que en el nuevo equilibrio el trabajo reaccione más fuertemente que el salario. Esto se debe a que la familias está mucho más dispuesta a sacrificar ocio hoy si su precio se incrementa ($\uparrow \widehat{w}_t$), por tanto bajo una alta elasticidad la familia reduce fuertemente su ocio e incrementa fuertemente su número de horas trabajadas (ver figura [5.5], gráfico de la derecha).

[B] Efectos sobre el consumo e inversión:

1. La elasticidad del **consumo** ante el capital η_{ck} es positiva y se debilita a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [5.7]). Un incremento del stock de capital de la economía, produce que las familias incrementen sus ingresos por medio del alquiler del capital ($\widehat{r}_t\widehat{k}_t$); por otro lado, la oferta de bienes se incrementa por medio de la función de producción. Este incremento de los ingresos lleva a la familia a aumentar el consumo, lo cual se observa en el signo positivo de η_{ck}. Adempas, la maginitud de η_{ck} es afectado por la elasticidad de la oferta de trabajo. El incremento del capital induce a que la familia reduzca su nivel de horas trabajadas afectando negativamente los ingresos. Este efecto mitiga parciamente el efecto inicial del incremento del capital. Mientras más fuerte sea la elasticidad de la oferta de trabajo, más fuerte será la reducción de ingresos por el lado laboral y por tanto mitigará en mayor medida el incremento inicial del capital. El resultado será que la elasticidad consumo-capital será menor a medida que γ_n sea más fuerte, tal como se observa en

la figura [5.7].

2. La elasticidad de la **inversión** ante el capital η_{ik} es negativa y se fortalece a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [5.7]). En la ley de movimiento del capital existen dos variables de control: $\widehat{k}_{t+1}$ y $\widehat{i}_t$. Usualmente, en la optimización una de estas dos variables es eliminada ya que dependen una de otra. La ley de movimiento del capital usualmente se escribe como $\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$; sin embargo, se puede reescribir esta ecuación de la siguiente manera: $\delta\widehat{i}_t = \widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t$. Bajo esta última forma se observa que un incremento del stock de capital $\widehat{k}_t$ incentiva a la familia a reducir su inversión. A mayor elasticidad de la oferta de trabajo, un incremento del stock de capital de hoy aumenta en menor medida el stock de capital de mañana, lo cual se observa en el comportamiento de η_{kk}. Este efecto incentiva que la inversión se debilite; por tanto, a medida que γ_n se fortalece η_{ik}.

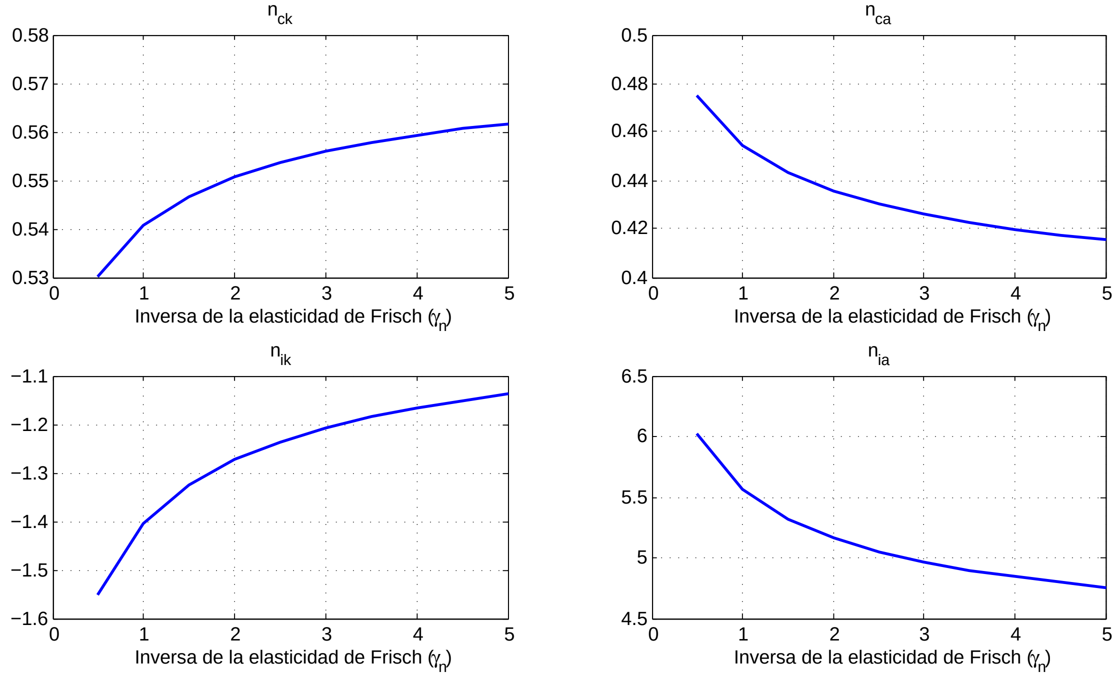
3. La elasticidad del **consumo** η_{ca} y de la **inversión** η_{ia} ante la productividad son positivas y se fortalecen a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver figura [5.7]). Un choque de productividad genera un efecto riqueza, el cual es orientado al consumo y ahorro. Como se mencionó en el análisis de δ, la familia representativa encuentra óptimo suavizar su consumo ante choques transitorios y trasladar gran parte de su efecto al ahorro (inversión). Este comportamiento de la familia hace que el consumo y la inversión se incremente, pero este último en mayor proporción. Esto se refleja en el signo positivo de η_{ca} y η_{ia}, y en que η_{ia} es mayor que η_{ca} para todos los valores de γ_n (como también para los valores de δ). Cabe mencionar que la magnitud de ambas elasticidades es moderada por la elasticidad de la oferta de trabajo $(1/\gamma_n)$. Cuando dicha elasticidad es mayor, entonces la familia reduce más su ocio de hoy (más trabajo) por más ocio mañana ante un choque de productividad. Este incremento de las horas trabajadas induce a la familia a tener más recursos, los cuales son direccionados al consumo y a la inversión. En el caso que la elasticidad de la oferta de trabajo es pequeña, las horas trabajadas también se incrementan pero en menor magnitud, lo cual permite la expansión del consumo e inversión pero en menor magnitud que el caso de una elasticidad de oferta de trabajo mayor.

[C] Efectos sobre el producto y la tasa de interés:

1. La elasticidad del **producto** con respecto al capital η_{yk} es positiva y se reduce a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver la figura [5.8]). Un incremento del capital, por medio de la función de producción, eleva la producción en "t", lo cual se refleja en el signo positivo de η_{yk}. De otro lado, el incremento del capital eleva lo ingresos de las familias, las cuales al sentirse más "ricas", deciden incrementar su consumo de ocio y reducir su oferta de trabajo. Esta contracción de la oferta de trabajo induce un efecto negativo sobre la función de producción mitigando parcialmente el efecto positivo del incremento del capital. La magnitud de este efecto negativo depende de la elasticidad de la oferta de trabajo. Si la oferta de trabajo es más elástica, entonces el trabajo de equilibrio seria mucho menor y por ende el efecto negativo sobre la producción sería más grande y mitigaría con más fuerza el efecto positivo inicial del capital. Todo esto se refleja en que η_{yk} sería más pequeña a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo sea mayor.

2. La elasticidad de la **tasa de interés** con respecto al capital η_{rk} es negativa y se incrementa a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver la figura [5.8]). Un

Figura 5.7: Efectos de γ_n sobre los coeficientes del consumo e inversión

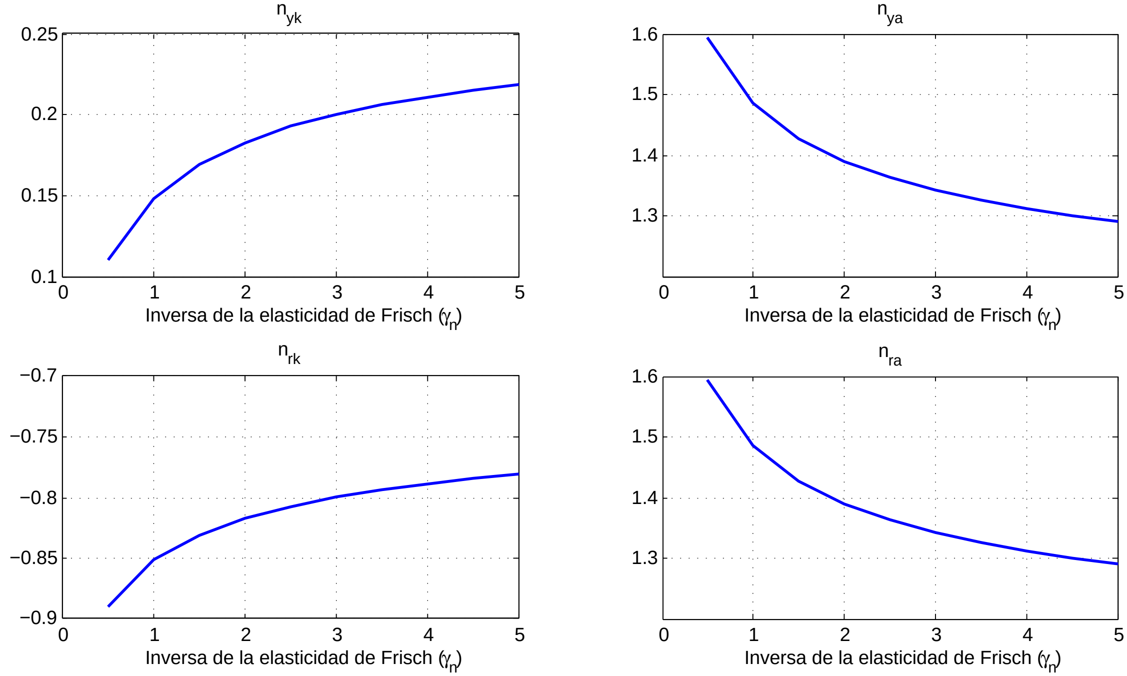


incremento del stock de capital en "t" significa que la oferta del capital se expande. En este escenario, y bajo una demanda de capital invariante, la tasa de interés de equilibrio se contre. Este comportamiento se refleja en el signo negativo de η_{rk}. Un segundo efecto de este incremento en el stock de capital es sobre la demanda de capital, la cual se expande por medio del aumento del producto: el capital aumenta, entonces incrementa el producto y por tanto eleva la demanda de capital. Este último movimiento mitiga parcialmente la reducción inicial de la tasa de interés. Uno de los parámetros que controla la expansión de la demanda de capital es la elasticidad de la oferta de trabajo ($1/\gamma_n$). Del párrafo previo se sabe que η_{yk} es menor a medida que $1/\gamma_n$ se incrementa. Entonces, si la elasticidad de la oferta de trabajo es grande, el movimiento de la demanda de capital será pequeño porque η_{yk} es reducido y como consecuencia el efecto mitigador sobre la reducción de la tasa de interés será pequeño. Todo esto indica que a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo es fuerte entonces η_{rk} será también fuerte tal como se observa en la figura [5.8].

3. La elasticidad de **producto** con respecto a la productividad η_{ya} es positiva y se incrementa a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver la figura [5.8]). Un incremento en la productividad expande de manera paralela la función de producción log-lineal, lo cual sugiere el signo positivo de η_{ya}. Existe un efecto adicional cuando se considera la elasticidad de la oferta de trabajo γ_n. Cuando la oferta de trabajo es más elástica, entonces el número de horas trabajadas de equilibrio son mayores que en el caso que dicha oferta tenga menor elasticidad. Este incremento mayor en el trabajo influye positivamente sobre el producto y fortaleciendo así η_{ya}.

4. La elasticidad de la **tasa de interés** con respecto a la productividad η_{ra} es positiva

Figura 5.8: Efectos de γ_n sobre los coeficientes del producto y tasa de interés

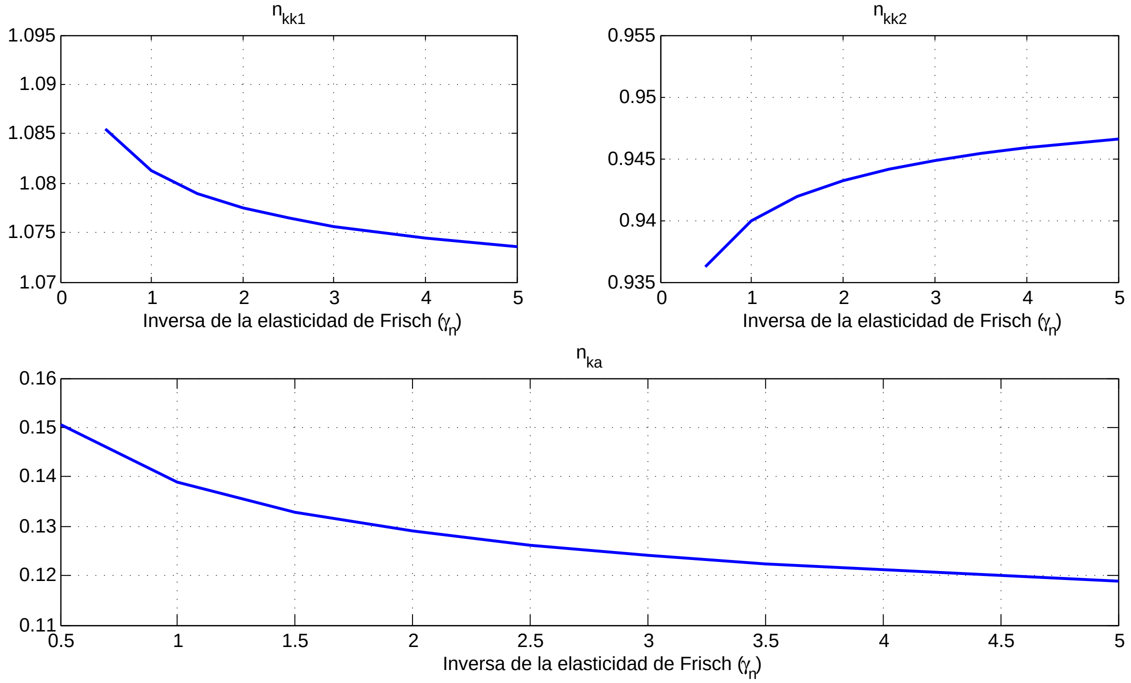


y se incrementa a medida que la oferta de trabajo es más elástica (ver la figura [5.8]). El signo positivo se debe a que un incremento de la productividad incentiva la demanda de bienes de capital, lo cual bajo una oferta de capital perfectamente inelastica empuja al alza la tasa de interés real. De otro lado, la magnitud de η_{ra} está influenciado por γ_n. Bajo el escenario de una oferta de trabajo muy elástica, la demanda de capital sufrirá una expansión adicional por el efecto del incremento del trabajo en la función de producción. Dado que γ_n controla dicho incremento del trabajo, entonces a mayor γ_n, mayor horas trabajadas y por tanto el efecto positivo sobre la demanda de capital será mayor. Este movimiento adicional de la demanda de capital fortalece más el incremento de la tasa de interés. Por tanto, a mayor γ_n, mayor η_{ra} tal como se observa en la figura [5.8].

[D] Efectos sobre el capital:

1. La elasticidad del capital en "t+1" con respecto al capital en "t" η_{kk} es positiva y se reduce a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo es mayor (ver la figura [5.9]). Por la ecuación del movimiento del capital ($\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \delta\widehat{i}_t$) se infiere que un incremento del capital de hoy puede influenciar al capital de mañana por dos vías: la primera de manera directa $(1-\delta)\widehat{k}_t$, y la segunda de manera indirecta por medio de la inversión $\delta\widehat{i}_t$. El efecto de este segundo elemento sobre el capital de mañana está condicionado al valor de la elasticidad de la oferta de trabajo. Como se sabe de la figura [5.7], η_{ik} es negativo y se fortalece a medida que $1/\gamma_n$ se incrementa. En este escenario se aprecia que ante un incremento del stock de capital, el efecto de la inversión sobre $\widehat{k}_{t+1}$ mitiga parcialmente el efecto positivo de $\widehat{k}_t$. En base a todo lo anterior, a medida que $1/\gamma_n$ se fortalece, η_{kk} debilita.

Figura 5.9: Efectos de γ_n sobre los coeficientes del capital



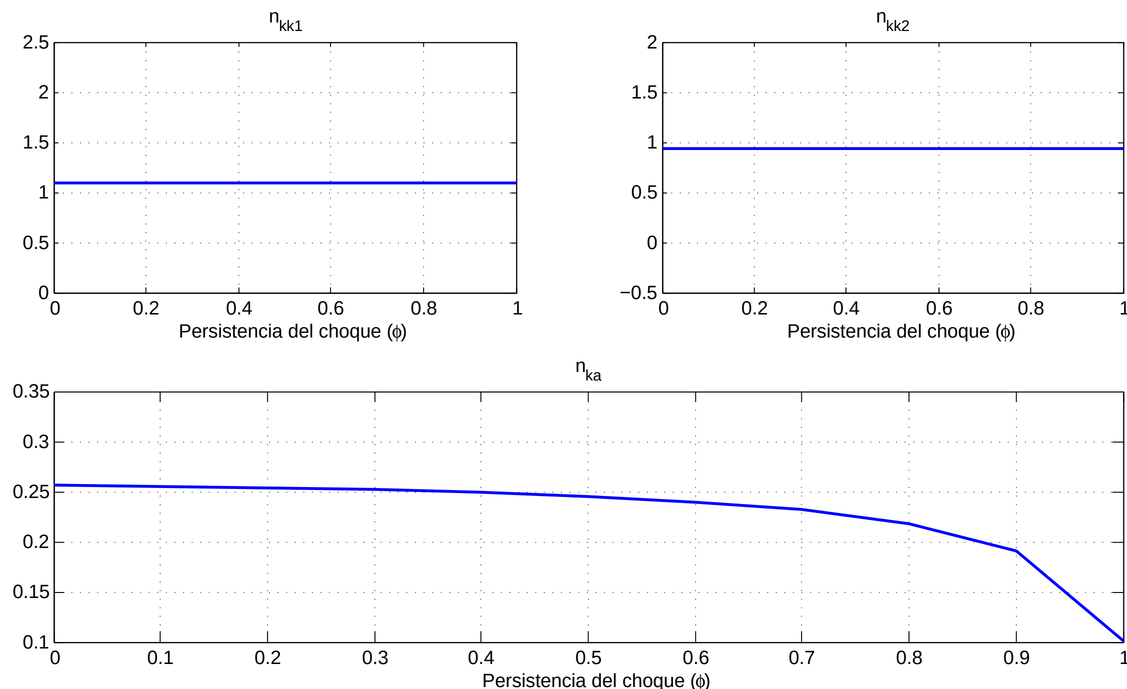
2. La elasticidad del capital en "t+1" con respecto a la productividad en "t" η_{ka} es positiva y se fortlece a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo es mayor (ver la figura [5.9]). Un choque de productividad impacta positivamente sobre la inversión, tal como se observa en la figura [5.7], lo cual a su vez influye sobre $\widehat{k}_{t+1}$ por medio de la ecuación del movimiento del capital. La figura [5.7] sugiere que η_{ia} se fortalece a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo se incrementa. Debido a que la inversión afecta directamente al capital de mañana, entonces el mismo comportamiento de η_{ia} se traslada a η_{ka}.

Efectos de ϕ

La persistencia del choque de productividad ϕ es importante en la supervivencia temporal de los efectos del choque inicial. Dada la naturaleza de la productividad, la cual se comporta como un AR(1): $\widehat{a}_t = \phi\widehat{a}_{t-1} + \epsilon_t$, una alta persistencia permite que $\widehat{a}_t$ se mantenga por encima de su estado estacionario por más tiempo, si el choque es positivo, afectando a la economía por más tiempo. Existen dos casos extremos: por un lado, persistencia igual a cero, lo cual indica que el choque solo vive un periodo; por otro lado, persistencia igual a uno, lo cual indica que el choque es permanente; es decir, el efecto del choque se mantiene en todos los periodos. En esta sección se analiza los efectos de la persistencia sobre las elasticidades de la solución considerando que el choque es temporal; es decir, que $\phi \in [0, 1[$.

Una de las primeras conclusiones que se desprende de las figuras [5.10] al [5.13] es que la persistencia no afecta las elasticidades asociadas al stock del capital $\widehat{k}_t$. Por ejemplo, η_{kk}, η_{ck} y η_{ik} se mantienen invariantes ante distintos valores de ϕ. Esto se debe a que la

Figura 5.10: Efectos de ϕ sobre los coeficientes del capital



persistencia solo afecta el comportamiento de la productividad y por tanto es de esperar que diho parámetro influya en los coeficientes de la solución asociadas a la productividad $\widehat{a}_t$. Por ejemplo, η_{ka}, η_{ca} y η_{ia} muestran sensibilidad ante distintos valores de la persistencia.

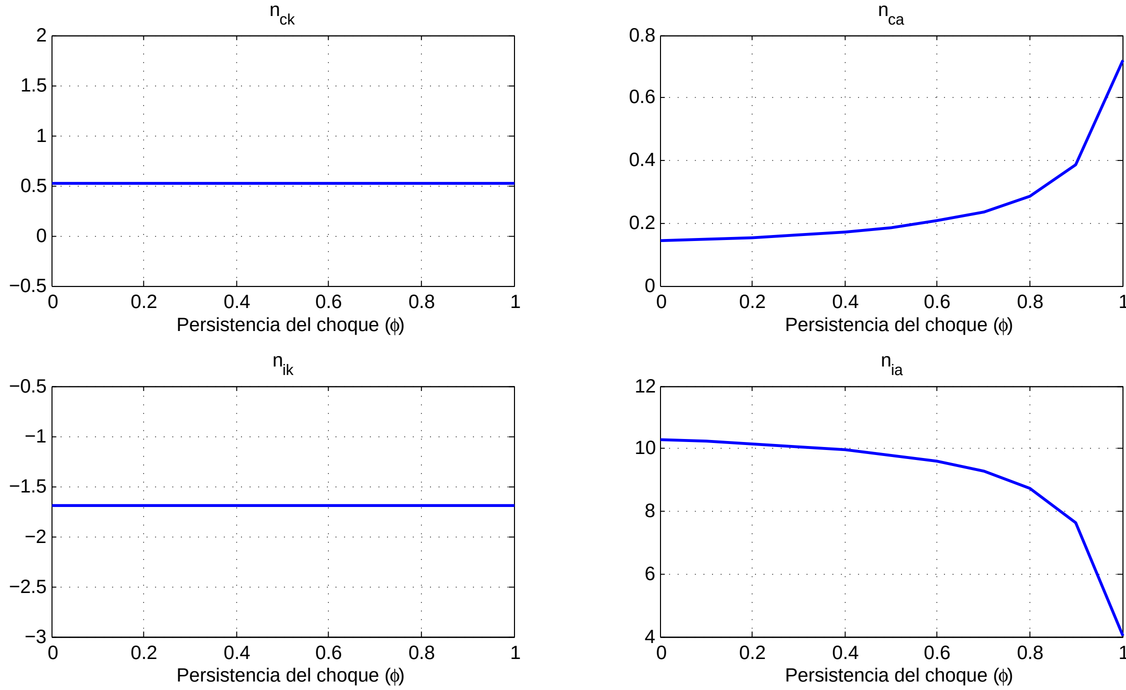
[A] Efectos sobre el capital:

1. La elasticidad del **capital** en "t+1" con respecto a la productividad η_{ka} es positiva y decreciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [5.10]). Un choque de productividad influye positivamente sobre $\widehat{k}_{t+1}$ por medio de la inversión. Dado que un choque de productividad produce un efecto riqueza, la familia representativa decide incrementar el consumo y la inversión, la cual incrementa el capital de mañana. Es por ello que el signo de η_{ka} es positivo. De otro lado, la familia siente que el choque es más "permanente" a medida que la persistencia es más cercana a uno, por ello decide incrementar más su consumo que su inversión, lo cual se observa en la figura [5.11]. Este incremento cada vez menor de la inversión a medida que la persistencia se fortalece produce que el capital de mañana se incremente pero bajo el mismo patrón; es decir, cada vez menos cuando la persistencia se incrementa. Este comportamiento se observa en η_{ka}.

[B] Efectos sobre el consumo e inversión:

1. La elasticidad del **consumo** con respecto a la productividad η_{ca} es positiva y creciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [5.11]). Por el contrario, la elasticidad de la **inversión** con respecto a la productividad η_{ia} es decreciente, aunque positiva como η_{ca} (ver figura [5.11]). El choque de productividad

Figura 5.11: Efectos de ϕ sobre los coeficientes del consumo e inversión

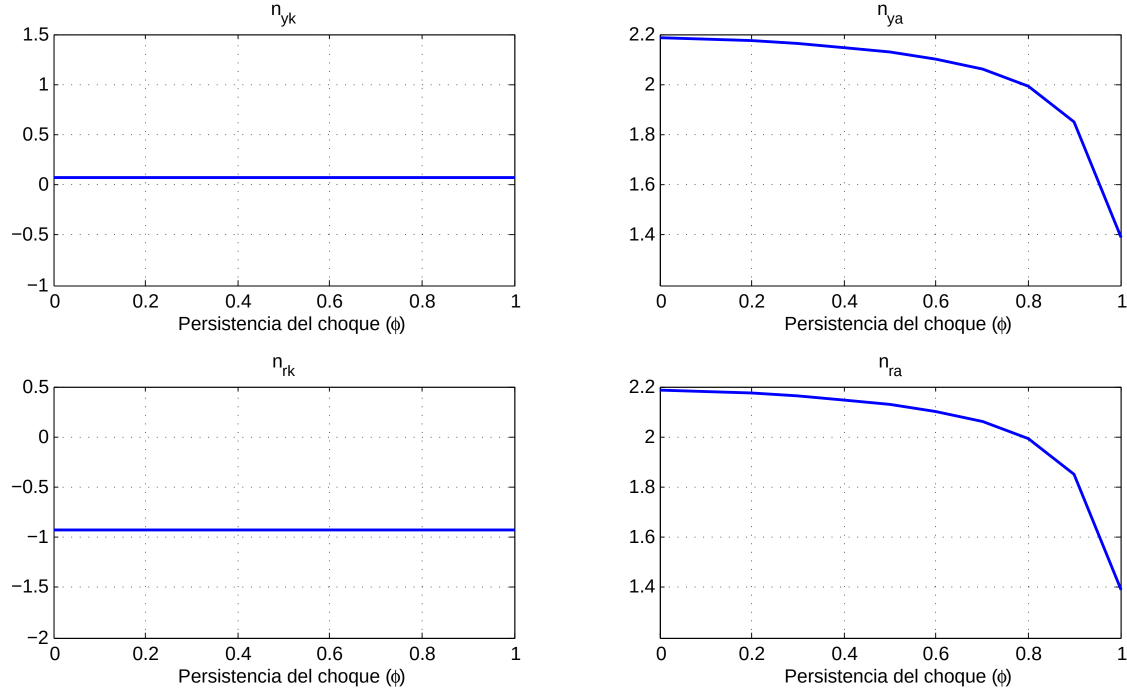


produce un efecto riqueza en la familia. Este efecto riqueza se debe a que la demanda de capital y la demanda de trabajo se incrementa y dado que la familia recibe ingresos por ambos factores, entonces su nivel de ingresos se eleva. Este mayor ingreso es destinado al consumo e inversión, los cuales aumentan. Es por ello que ambas elasticidades η_{ca} y η_{ia} tienen el mismo signo positivo. Además, la magnitud de estas elasticidades está influenciada por el valor de ϕ. A medida que ϕ se acerca a uno, la familia percibe que el choque de productividad es más "permanente"; es decir, que sus efectos se mantienen en el tiempo. En este escenario, la familia encuentra óptimo orientar más recursos al consumo que a la inversión porque su patrón de ingreso ha cambiado casi permanentemente. Por tanto, la elasticidad del consumo es alto cuando la persistencia del choque es alta, mientras que la elasticidad de la inversión es baja en este mismo escenario. En el caso que la persistencia tiende a cero; es decir, que el choque vive solo un periodo y sus efectos son "temporales", entonces la familia encuentra óptimo orientar los recursos al ahorro (inversión) con el fin de suavizar su consumo. Por tanto, en este escenario se observa que la elasticidad del consumo es baja, mientras la elasticidad de la inversión es alta.

[C] Efectos sobre el producto y tasa de interés:

1. La elasticidad del **producto** con respecto a la productividad η_{ya} es positiva y decreciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [5.12]). El choque de productividad afecta a la producción directamente por $\widehat{a}_t$ e indirectamente por el trabajo $\widehat{h}_t$. Esto se observa en la forma funcional de la producción: $\widehat{y}_t = \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t$. Para entender cómo ϕ influye sobre η_{ya} es necesario

Figura 5.12: Efectos de ϕ sobre los coeficientes del producto y tasa de interés



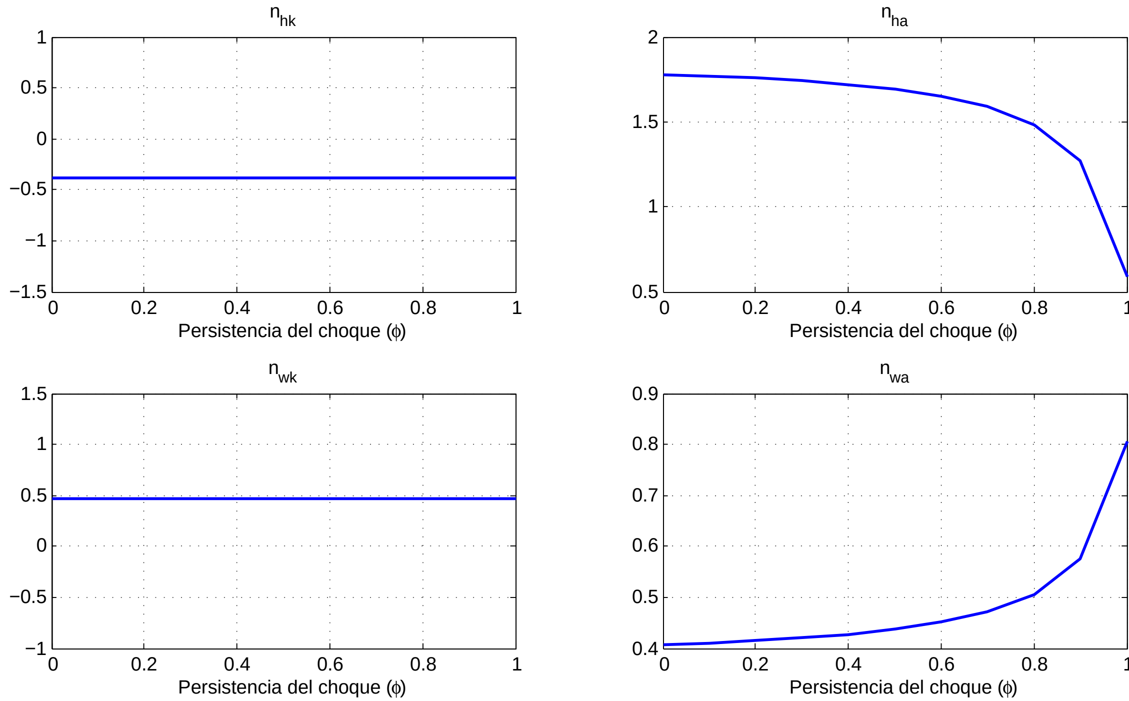
analizar cómo el trabajo responde ante este parámetro. Se sabe de la figura [5.13] que una mayor persistencia del choque de productividad induce a la familia a incrementar su ocio y reducir el trabajo porque la familia siente que la productividad tiene efectos permanentes. Entonces, a medida que se incrementa ϕ la familia incrementa su trabajo ante un choque de productividad pero en menor medida. Por lo tanto, a medida que se incrementa la persistencia, el producto aumenta pero cada vez en menor medida porque el trabajo aumenta pero también en menor medida.

2. La elasticidad de la **tasa de interés** con respecto a la productividad η_{ya} es positiva y decreciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [5.12]). El choque de productividad eleva la demanda de capital y bajo una oferta inelástica de capital, incrementa la tasa de interés de equilibrio. Debido a que la demanda de capital $\widehat{r}_t = \widehat{y}_t - \widehat{k}_t$ depende del producto, entonces el patrón del movimiento del producto ante un choque de productividad es totalmente trasladada al comportamiento de la demanda. Por ejemplo, el párrafo anterior indica que η_{ya} es decreciente a medida que la persistencia de la productividad se incrementa. Este comportamiento es trasladado a la demanda de capital que en conjunto con la oferta de capital permiten que la elasticidad tasa de interés - productividad también sea decreciente en ϕ.

[D] Efectos sobre el trabajo y el salario:

1. La elasticidad del **trabajo** con respecto a la productividad es positiva y se reduce a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [5.13]). Además, la elasticidad del **salario** con respecto a la productividad es positiva y

Figura 5.13: Efectos de ϕ sobre los coeficientes del trabajo y salario



se fortalece a medida que la persistencia de la productividad se incrementa (ver figura [5.13]). Un choque de productividad tiene dos efectos en el mercado laboral: el primero es directamente sobre la demanda, la cual se expande; el segundo, es indirectamente sobre la oferta por medio del incremento del consumo. Por un lado, la demanda se expande y por otros lado la oferta se constrae.

5.3.2. Funciones impulso-respuesta

La función impulso-respuesta es la reacción de las variables endógenas ante un choque. Esta reacción tiene una magnitud y un tiempo de vida. Cabe mencionar que cada elemento de la función impulso-respuesta representa un equilibrio y por tanto una respuesta óptima del agente representativo. En esta sección se considera que el choque es el de productividad.

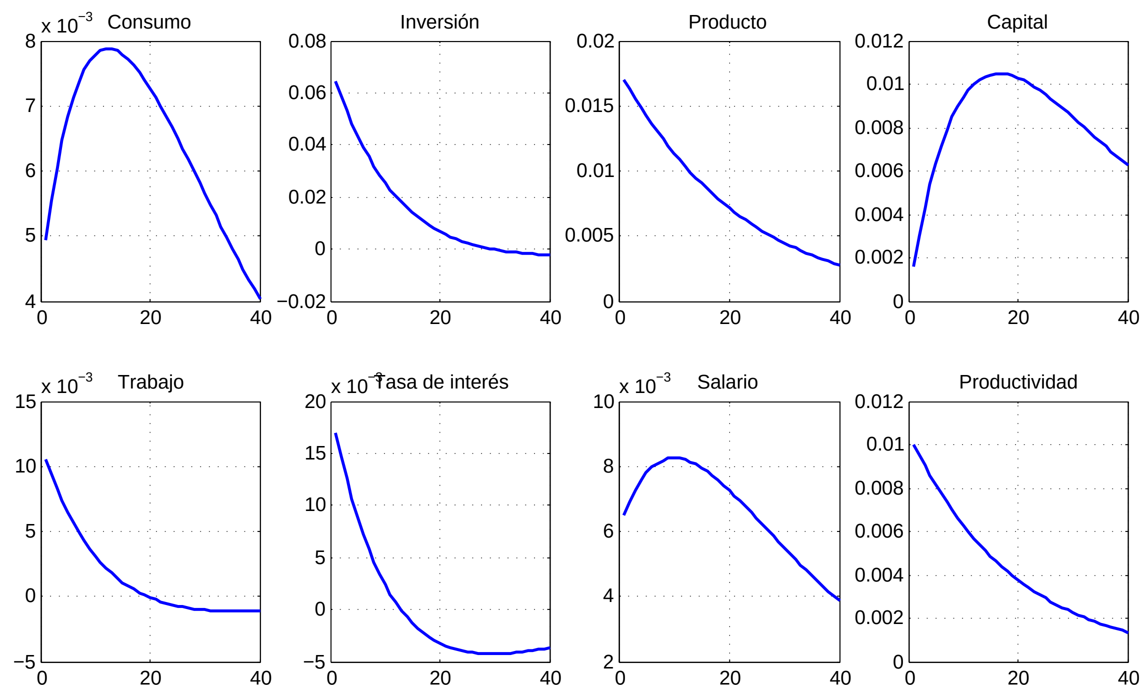
¿Cómo reacciona la economía ante un choque de productividad?

- El choque de productividad se prodice en $t = 0$, en este periodo ϵ_0 toma el valor de su desviación estándar $\sigma = 0.763$. Esto lleva a que la productividad se incremente ($\uparrow \widehat{a}_t$).

- El incremento de la productividad tiene dos efectos: el primero es el incremento de la función de producción $\uparrow \widehat{y}_t = \uparrow \widehat{a}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{h}_t$. El segundo es el incremento de la demanda en el mercado de factores (del capital y del trabajo).

- En el caso del mercado de trabajo, el incremento de la demanda eleva el salario real

Figura 5.14: Campbell (1994) con trabajo variable: choque de productividad



Nota: Este gráfico se obtiene del m−file “Analisis_sensibilidad_irf.m”

y el el número de horas de trabajo de equilibrio. Notar que a medida que la oferta es más elastica ($\downarrow \gamma_n$), el impacto del movimiento de la demanda es mayor.

- En el mercado de bienes de capital se observa que el incremento de la demanda se traslada completamente a la oferta. Esto se debe a que la oferta es perfectamente inelastica (invariante con la tasa de interés). Además, este incremento en la demanda eleva la tasa de interés.
- El mayor salario ($\uparrow w_t$) y el incremento de la tasa de interés ($\uparrow r_t$) incrementa el ingreso de la familia, lo cual lleva a incrementar el consumo y la inversión.

5.3.3. Comparación modelo teórico con los datos

¿Se necesita que el choque sea significativo para que el modelo replique los datos?

La respuesta a esta pregunta, *a priori*, es sí. El modelo RBC por lo general necesita que la magnitud del choque de productividad sea significativo (alrededor de 0.7 %). Sin embargo, esta dependencia se reduce cuando se considera la utilización variable del capital. Tal como lo señala King y Rebelo (1999), un modelo RBC con utilización de capital requiere un choque de productividad de 0.1 % aproximadamente para acercarse a los datos. En los párrafos siguientes se describe como la magnitud del choque tiene implicancias sobre la capacidad del modelo en acercarse a los datos. En principio con un choque de 0.4 % el modelo se encuentra muy lejos de los datos, mientras que con un choque de 0.7 % el modelo

se comporta mejor pero con ciertas deficiencias. Además, se observa que la correlación del producto con las vriables del modelo y la autocorrelación de primer orden no dependen de la magnitud del choque.

En el cuadro [5.11] se muestra tres estadísticos (desviación estándar, correlación y autocorrelación de primer orden) del componente cíclico de los datos y del modelo para cada variable. Los estadísticos del modelo se han calculado suponiendo cuatro valores del choque de productividad (σ). La idea detrás de esto es evaluar si el modelo necesita un choque "significativo" para replicar los datos. Con esto en mente, se procede a describir las conclusiones que emergen de este cuadro.

[A] Desviación estándar: en primer lugar, se observa que a medida que el choque es más fuerte (de $\sigma = 0.004$ a 0.015), la desviación estándar de las variables se incrementa. Por ejemplo, la desviación estándar del consumo para $\sigma = 0.004$ es igual a 0.31 %, mientras que para $\sigma = 0.015$ es igual a 1.16 %. En segundo lugar, bajo una magnitud pequeña del choque de productividad, el modelo se queda muy lejos de lo observado en los datos. Por ejemplo, para $\sigma = 0.004$ que la desviación estándar del consumo es 0.31 % mientras que los datos indican que dicho estadístico es igual a 1.27 %. De igual forma para la inversión, el modelo se queda lejos de lo encontrado en los datos (3.37 % en el modelo vs 5.30 % en los datos). Este mismo comportamiento se observa en todas las variables.

En tercer lugar, el valor de $\sigma = 0.007$ ha sido utilizado por Prescott (1986), un valor similar ($\sigma = 0.00712$) por Hansen (1985) y por King y Rebelo (1999) ($\sigma = 0.0072$). Bajo esta magnitud del choque, el modelo mejora en acercarse a los datos (en comparación con $\sigma = 0.004$), por ejemplo la desviación estándar de la inversión que brinda el modelo es 5.9 %, lo cual es más cercano a los datos (5.30 %), de la misma manera se observa para el producto y del salario real. Sin embargo, los resultados del modelo para el consumo, el trabajo y la tasa de interés aún están lejos de lo observado. Por ejemplo, la desviación estándar del consumo pasa de 0.31 % a 0.54 % cuando el choque se incrementa de 0.004 a 0.007, pero aún está por debajo del valor empírico 1.35 %. Lo mismo se observa para el trabajo, el modelo indica que la desviación estándar es 0.96 %, mientras los datos sugieren que dicho estadístico es igual a 1.79 %. En cuanto a la tasa de interés, el modelo sobreestima fuertemente el estadístico (1.58 % vs 0.30 %). En cuarto lugar, el valor de $\sigma = 0.01$ es considerado por Campbell (1994). Bajo este valor el modelo sobreestima el estadístico en cuatro variables: la inversión, el producto, la tasa de interés y el salario real. Por ejemplo, la desviación de la inversión llega a ser 8.42 % superando largamente lo observado (5.30 %). Sin embargo, se observa que en el consumo y el trabajo el modelo se acerca más a los datos, pero aún por debajo. Por ejemplo, la desviación estándar del consumo se incrementa de 0.54 % a 0.77 % cuando el choque pasa de 0.007 a 0.010, pero aún está por debajo de lo observado (1.35 %).

En quinto lugar, se observa que para un choque de productividad mayor ($\sigma = 0.015$) los resultados del modelo sobreestiman largamente lo encontrado en los datos excepto para el consumo. Por ejemplo, para el caso de la inversión, los datos indican que su desviación estándar es 5.30 %, mientras que el modelo indica que es 12.64 %. De la misma forma para el producto, el modelo sugiere que la desviación estándar es casi el doble de lo encontrado en los datos (3.33 % vs 1.72 %). Solo en el consumo, el modelo se acerca mejor a los datos

Cuadro 5.11: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empíricos

Variable (x_t)	Desviación Estándar (%)					Corr(PBI_t, x_t)		Autocorrelación	
	Datos	Modelo				Datos	Modelo	Datos	Modelo
$\sigma =$		0.004	0.007	0.01	0.015		0.004 al 0.015		0.004 al 0.015
Consumo	1.35	0.31	0.54	0.77	1.16	0.88	0.8851	0.80	0.8191
Inversión	5.30	3.37	5.9	8.42	12.64	0.80	0.9856	0.87	0.7013
Producto	1.81	0.89	1.56	2.22	3.33	1	1	0.84	0.7162
Capital		0.29	0.51	0.73	1.09		0.3915		0.9572
Trabajo	1.79	0.55	0.96	1.37	2.06	0.88	0.9736	0.88	0.6995
Tasa de interés	0.30	0.9	1.58	2.26	3.39	-0.35	0.9477	0.60	0.7006
Salario real	0.68	0.38	0.66	0.94	1.41	0.12	0.9423	0.66	0.7826

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de King y Rebelo (1999) y todas las variables están en logarítmo natural, excepto la tasa de interés. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una sola simulación. Estos valores se obtiene del archivo "Campbell_Lvariable_nolineal_log7.mod".

(1.16 % en el modelo vs 1.35 % en los datos). Finalmente, es importante mencionar que el impacto del choque de productividad está sujeto a la parametrización del modelo.

[B] Correlación con el PBI: en primer lugar, la correlación del producto con las demás variables no depende de la magnitud del choque de productividad; por tanto, las diferencias que se podría encontrar entre lo observado y lo inferido por el modelo no corresponde a la magnitud del choque sino a la parametrización del modelo y los supuestos subyacentes. En segundo lugar, del cuadro [5.11] se observa que la correlación que brinda el modelo es mayor en todas las variables con respecto a lo sugerido por los datos. Por ejemplo, la correlación del producto con el consumo en los datos es de 0.88, mientras que el modelo indica que este es igual a 0.8851. De igual forma para la inversión (0.80 en los datos vs 0.9856 en el modelo). Esta sobreestimación del modelo se observa en la correlación del producto con todas las variables.

En tercer lugar, los datos indican que la tasa de interés es contraciclica ($corr(y_t, r_t) < 0$); sin embargo, el modelo infiere que la tasa de interés es altamente procíclica ($corr(y_t, r_t) = 0.9477$). En cuarto lugar, los datos sugieren que el salario real tiene una correlación muy pequeña con el producto; sin embargo, el modelo sugiere que dicho estadístico es muy cercano a uno. Estas dos debilidades del modelo en replicar los datos, por lo general, son transversales a los modelos RBC y representan dos principales críticas a esta escuela.

[C] Autocorrelación de primer orden: en primer lugar, la autocorrelacón de primer orden, al igual que la correlación del producto con las variables del modelo, no depende de la magnitud del choque de productividad. En segundo lugar, el modelo subestima la autocorrelación del producto (0.7013 vs 0.87). Esto representa una de las principales críticas al modelo RBC y ha sido enfatizada por varios autores entre los cuales se encuentra Cogley y Nason (1995). En terer lugar, el modelo sobreestima la autocorrelación del salario real y subestima la autocorrelación del trabajo.

¿Se necesita que la oferta de trabajo sea muy elástica para que el modelo replique los datos?

La respuesta a esta pregunta es sí. El modelo RBC necesita un mecanismo de transmisión fuerte que traslade los efectos del choque a las variables endógenas. En este contexto, la elasticidad de la oferta de trabajo se coloca como uno de los principales mecanismos de transmisión. Como se observa en los cuadros [5.12] y [5.13], a mayor elasticidad de la oferta de trabajo, los efectos del choque inicial son amplificados influyendo sobre los estadísticos del modelo. Dichos estadísticos se acercan más a lo observados en los datos a medida que la oferta de trabajo es más elástica. La dependencia del modelo RBC con respecto a la elasticidad de la oferta de trabajo fue duramente criticada debido a que los estudios microeconómicos indicaban que dicha elasticidad es pequeña, lo cual contrastaba con lo supuesto por la escuela RBC. Sin embargo, esta crítica fue contrarestada por Hansen (1985), quien desarrolló un modelo RBC libre de la dependencia de una fuerte elasticidad de la oferta de trabajo. Este último modelo se estudiará en detalle en el siguiente capítulo.

En el cuadro [5.12] se muestra como cambia la desviación estándar de cada una de las variables ante cuatro valores de la elasticidad de Frisch asumiendo un choque de 0.01; además, el estadístico obtenido del modelo se compara con lo observado en los datos. A continuación se describe el comportamiento de la desviación estándar.

[A] Desviación estándar: en primer lugar, se observa que a medida que la demanda de trabajo es más elástica, la desviación estándar de todas las variables se incrementa excepto del salario real, la cual disminuye. En segundo lugar, la desviación estándar del trabajo y del salario real producido por el modelo se acerca más a los datos a medida que la elasticidad de la oferta de trabajo se incrementa. Por ejemplo, la desviación estándar del trabajo pasa de 0.57 % a 1.44 % cuando la elasticidad se incrementa de 0.2 a 5. Sin embargo, en el caso de la inversión, el modelo sobreestima su desviación estándar para todos los valores de dicha elasticidad. De igual forma para la tasa de interés, donde el valor de elasticidad más bajo del cuadro ($\gamma_n = 0.2$) produce una desviación estándar de 1.72 %, la cual se encuentra muy por encima del valor observado (0.30 %).

En el cuadro [5.13] se describe dos estadísticos adicionales: la correlación del producto con las variables del modelo y la autocorrelación de primer orden. Ambos estadísticos son importantes en el comportamiento de los ciclos económicos. Asimismo, los cálculos derivados del modelo son comparados con la evidencia empírica. El objetivo de ello es evaluar si la mayor elasticidad de la oferta de trabajo fortalece la capacidad del modelo en replicar los datos. A continuación se describe los datos del cuadro [5.13].

[B] Correlación con el PBI: en primer lugar, la correlación del producto con cada una de las variables del modelo es superior a lo observado en los datos. En segundo lugar, dicha correlación se acerca más a la evidencia empírica a medida que la oferta de trabajo es más elástica ($\uparrow 1/\gamma_n$). Por ejemplo, los datos sugieren que la correlación del producto con el consumo es igual a 0.88; mientras que el modelo infiere que dicha correlación pasa de 0.9097 (con $1/\gamma_n = 0.2$) a 0.8834 (con $1/\gamma_n = 5$).

En tercer lugar, la correlación del producto con la inversión, obtenida del modelo, no

Cuadro 5.12: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empíricos

Variable (x_t)	Desviación Estándar (%)				
	Datos	Modelo			
Elasticidad Frisch ($1/\gamma_n$)=		0.2	1	2	5
Consumo	1.35	0.63	0.7	0.74	0.78
Inversión	5.30	6.21	7.25	7.84	8.59
Producto	1.81	1.69	1.94	2.08	2.26
Capital		0.54	0.63	0.68	0.74
Trabajo	1.79	0.57	0.95	1.17	1.44
Tasa de interés	0.30	1.72	1.98	2.12	2.3
Salario real	0.68	1.14	1.04	0.99	0.92

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de King y Rebelo (1999) y todas las variables están en logarítmo natural, excepto la tasa de interés. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una sola simulación. Estos valores se obtiene del archivo "Campbell_Lvariable_nolineal_log8.mod".

es afectada por la elasticidad de la oferta de trabajo. Como se puede observar en el cuadro [5.13], la correlación del producto con la inversión es 0.9856 para cualquier valor de $1/\gamma_n$, la cual se encuentra por encima del valor observado en los datos (0.8). En cuarto lugar, la elasticidad de la oferta de trabajo tiene poca influencia sobre la correlación entre el producto y el trabajo. Esto se observa en el hecho de que a medida que la elasticidad se incrementa, dicha correlación solo cambia en el cuarto decimal (de 0.9730 a 0.9736).

En quinto lugar, el modelo sobreestima largamente la correlación del producto con la tasa de interés y con el salario real. Con respecto a la tasa de interés, se observa que el modelo infiere que dicha correlación siempre es positiva y cercana a 1; es decir, altamente procíclica. Sin embargo, los datos sugieren que la tasa de interés es contracíclica. Con respecto a la correlación del producto con el salario real, el modelo captura el comportamiento cualitativo pero no el cuantitativo. Los datos sugieren que dicha correlación es baja (0.12); sin embargo, el modelo (para los cuatro valores de $1/\gamma_n$) brinda correlaciones superiores a 0.9. Cabe mencionar que la elasticidad de la oferta de trabajo ayuda a disminuir dicha correlación, pero no lo suficiente. Por ejemplo, para una alta elasticidad ($1/\gamma_n = 5$), la correlacion es 0.9351, lo cual es claramente superior a lo observado (0.12).

[C] Autocorrelación de primer orden: en primer lugar, una menor elasticidad de la oferta de trabajo ayuda al modelo en obtener una autocorrelación del consumo más cercana a lo observado. Por ejemplo, para una elasticidad de Frisch de 0.2, la autocorrelación del consumo derivada del modelo es 0.8093, muy cercano a lo observado (0.8). En segundo lugar, la autocorrelación de la inversión inferida por el modelo es menor que lo observado (0.84). Además, el cambio de elasticidad de la oferta de trabajo tiene impacto marginal en este estadístico. Por ejemplo, dicho estadístico pasa de 0.7063 a 0.7009 cuando la elasticidad se incrementa de 0.2 a 5. Es más, una mayor elasticidad de la oferta de trabajo produce que dicha autocorrelación disminuya y se aleje más de los datos.

Cuadro 5.13: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empíricos

Variable (x_t)	Corr(PBI_t, x_t)					Autocorrelación				
	Datos	Modelo				Datos	Modelo			
$1/\gamma_n$=		0.2	1	2	5		0.2	1	2	5
Consumo	0.88	0.9079	0.897	0.8909	0.8834	0.8	0.8093	0.8142	0.8167	0.8197
Inversión	0.8	0.9856	0.9856	0.9856	0.9856	0.87	0.7063	0.704	0.7027	0.7009
Producto	1	1	1	1	1	0.84	0.7211	0.7189	0.7176	0.7158
Capital		0.3905	0.3911	0.3913	0.3916		0.9585	0.9579	0.9575	0.9571
Trabajo	0.88	0.973	0.9733	0.9734	0.9736	0.88	0.7045	0.7023	0.7009	0.6991
Tasa de interés	-0.35	0.9494	0.9485	0.948	0.9476	0.6	0.7054	0.7033	0.702	0.7002
Salario real	0.12	0.9933	0.9776	0.9627	0.9351	0.66	0.7388	0.7553	0.7678	0.7874

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de King y Rebelo (1999) y todas las variables están en logarítmo natural, excepto la tasa de interés. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una sola simulación. Estos valores se obtiene del archivo "Campbell_Lvariable_nolineal_log8.mod".

En tercer lugar, la autocorrelación del salario real es la que más reacciona ante cambios de la elasticidad de la oferta de trabajo. Por ejemplo, cuando la elasticidad se reduce de 5 a 0.2, dicha autocorrelación pasa de 0.7874 a 0.7388. Sin embargo, este último valor aún permanece por encima de lo observado (0.66).

5.4. Códigos

En el cuadro [5.14] se menciona los códigos de Matlab y de Dynare que se han utilizado en este capítulo.

Cuadro 5.14: Códigos en Matlab y Dynare

Códigos	Descripción
Matlab	
Campbell_Lvariable.m	Este m-file contiene: [1] Calibración, [2] Cálculo del estado estacionario, y [3] Cálculo de los coeficientes de la solución (método coeficientes indeterminados).
trabajo_ss.m	El objetivo es calcular h_{ss} que está expresado en una ecuación no lineal.
Analisis_sensibilidad_irf.m	Este m-file grafica: [1A] ESI del consumo, [1B] persistencia del choque, [1C] Elasticidad de Frisch, [2A] (tamaño) choque de productividad, [3A] Tasa de depreciación, [4A] Modelo de Campbell (1994) vs Long y Plosser (1983), y [4B] solo el modelo de Campbell (1994) con trabajo variable.
Sensibilidad_parametros.m	De este m-file se obtiene la simulación de los coeficientes de la solución ante δ (tasa de depreciación), α (participación del capital en la renta nacional), γ_n (inversa de elasticidad de Frisch), y ϕ (persistencia del choque).
Dynare	
Campbell_Lvariable_nolineal_log1.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable. Además, se realiza análisis de sensibilidad para: [A] ESI del consumo ($1/\gamma$), [B] Persistencia (ϕ) del choque de productividad, y [C] Elasticidad de Frisch ($1/\gamma_n$).
Campbell_Lvariable_nolineal_log2.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable y con diferentes valores del choque de productividad (σ).
Campbell_Lvariable_nolineal_log3.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable y con diferentes valores de la tasa de depreciación (δ).
Campbell_Lvariable_nolineal_log4.mod	El modelo de Long y Plosser(1983) con la calibración de Campbell(1994).
Campbell_Lvariable_nolineal_log5.mod	Es el mismo modelo de Campbell(1994) con trabajo variable del "mod1", el cual es utilizado para constuir la tabla de la función de política y estado de este capítulo.
Campbell_Lvariable_nolineal_log7.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable. Se analiza los momentos del componente cíclico de las variables (filtro HP) antes distintos valores del choque (σ).
Campbell_Lvariable_nolineal_log8.mod	El modelo de Campbell(1994) con trabajo variable. Se analiza los momentos del componente cíclico de las variables (filtro HP) antes distintos valores de la elasticidad de Frisch ($1/\gamma_n$).

5.5. Anexos

Figura 5.15: Elasticidad de sustitución del consumo $(1/\gamma)$

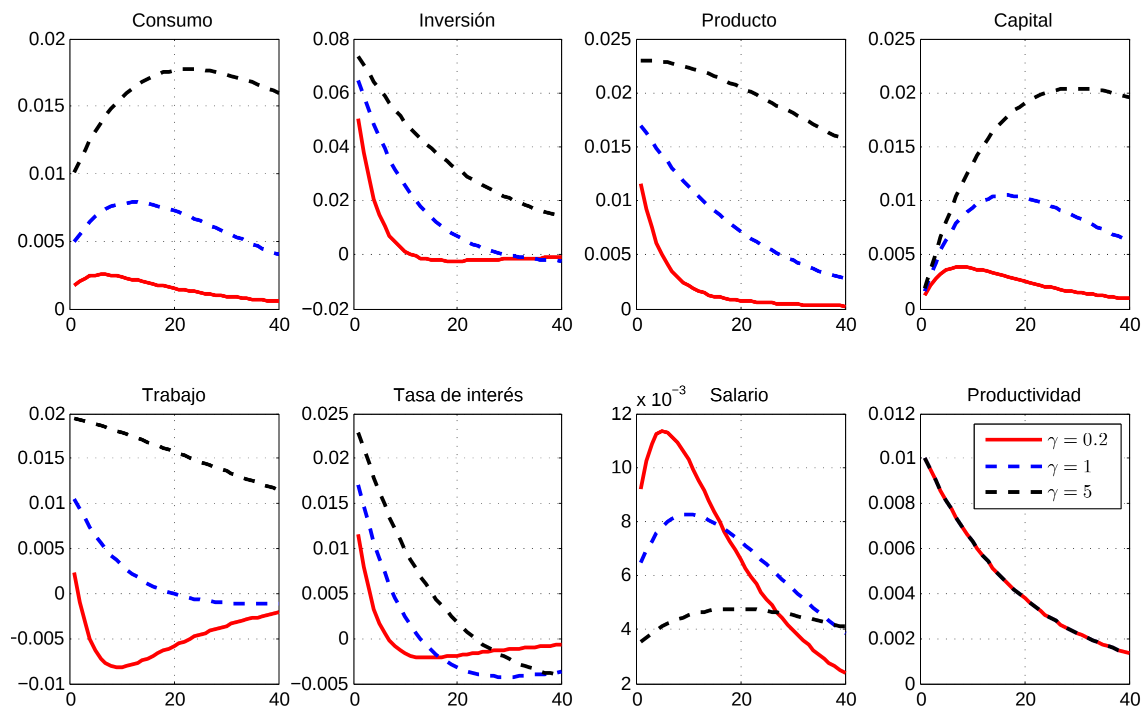


Figura 5.16: Tamaño (σ_ϵ) del choque de productividad

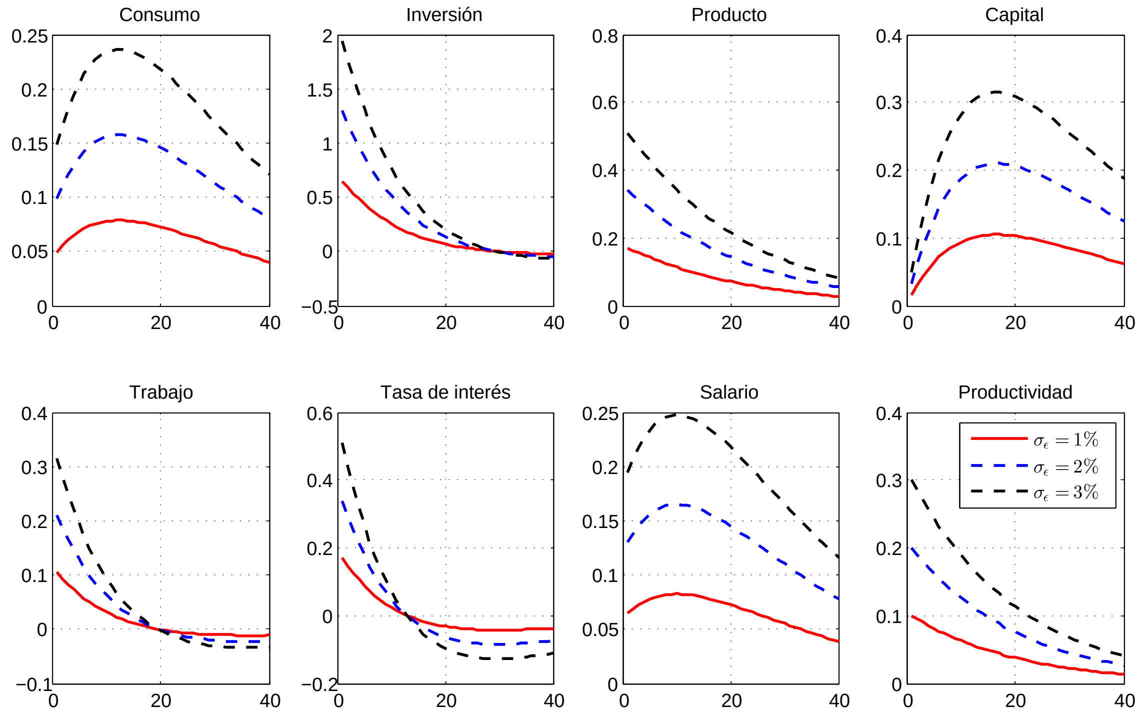


Figura 5.17: Persistencia (ϕ) del choque de productividad

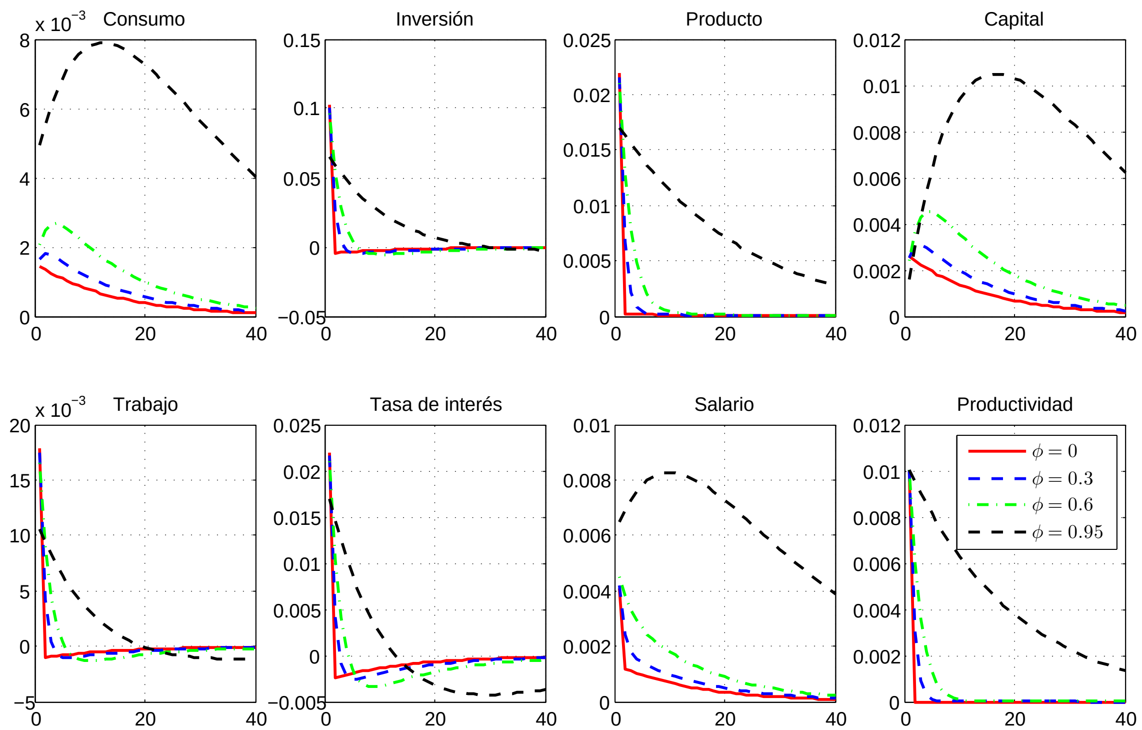


Figura 5.18: Elasticidad de la oferta de trabajo ($1/\gamma_n$)

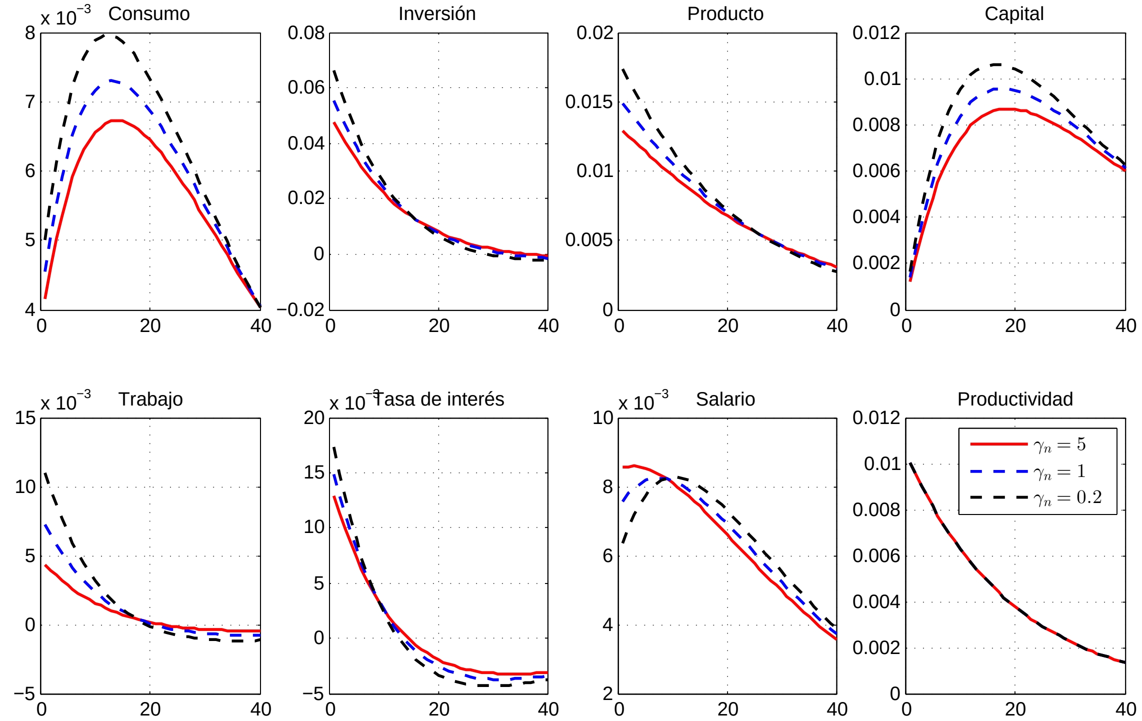


Figura 5.19: Tasa de depreciación (δ)

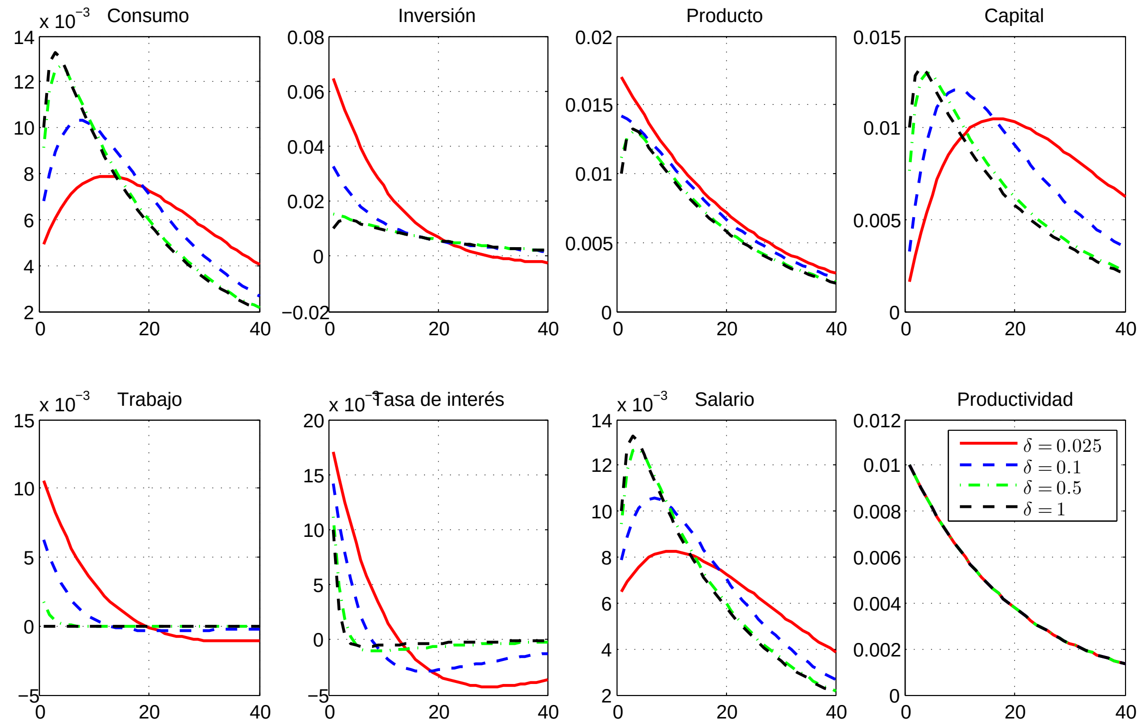
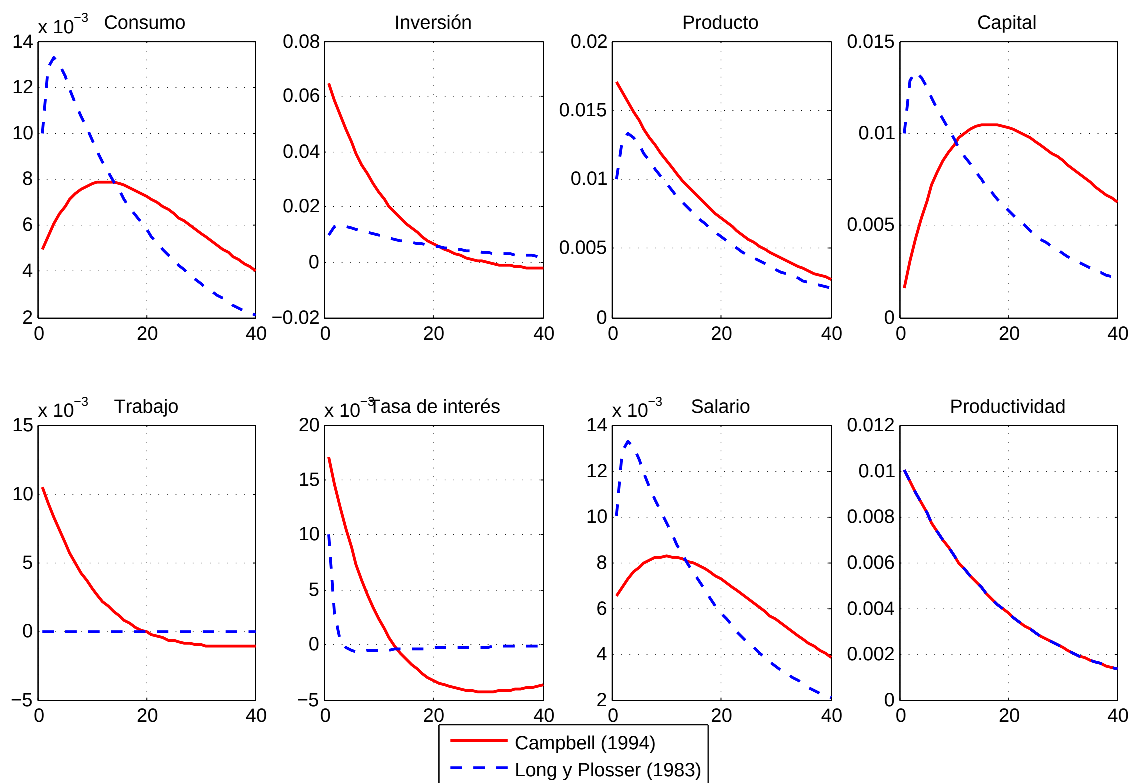


Figura 5.20: Compración entre el Modelo de Long y Plosser (1983) y el de Campbell (1994) con trabajo variable



Capítulo 6

Modelo RBC con choque a la inversión y utilización variable del capital

6.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es analizar los efectos sobre las variables endógenas de un choque diferente al de la productividad. En la literatura el choque a la productividad ha sido muy cuestionado. Una de sus principales críticas es que su magnitud y persistencia considerada en el modelo RBC están por encima de lo observado en los datos. Además de ello, los modelos RBC asumen que una recesión ocurre cuando la productividad es negativa; es decir, cuando hay una reversión tecnológica, lo cual es implausible en la evidencia empírica.

A diferencia de los capítulos previos, este capítulo se basa en la perspectiva de Keynes sobre la fuente de los ciclos económicos. En particular Keynes sostenía que la inversión era uno de los determinantes de los ciclos económicos. En ese sentido, en este capítulo analizaremos el efecto del choque a la inversión en el contexto de los postulados de la escuela RBC. Para ello nos basaremos en el modelo de Greenwood et. al. (1989), quienes postularon lo siguiente: un aumento en la eficiencia de la inversión (ϵ_t) incrementa la formación de nuevo capital (k_{t+1}) e incentiva un mayor uso del capital que ya se dispone (k_t) acelerando su depreciación (δ_t).

En este capítulo se analiza el efecto del choque a la inversión en un modelo RBC estándar como el de Campbell (1994) y en un modelo que considera la utilización variable del capital como el de Greenwood et al (1988). Cuando se incorpora un choque a la eficiencia marginal de la inversión en un modelo RBC estándar, el mecanísmo de transmisión es la sustitución intertemporal del ocio, la cual produce que el consumo se mueva de manera contracíclica, lo cual contradice la evidencia empírica.

Sin embargo, al incorporar este choque en un modelo RBC estándar que considere la "tasa de utilización variable del capital", el modelo es consistente con la evidencia empírica al producir un incremento del consumo. En este caso el mecanísmo de transmisión es la

Cuadro 6.1: Choque a la inversión vs choque a la productividad

Modelo RBC estándar (Kydland y Prescott, 1982; Long y Plosser, 1983; Campbell, 1994)	Un choque de productividad incrementa la producción y por ende el consumo y la inversión, de ello se desprende que "la inversión reacciona a la producción". Esto sugiere que los choques primero tienen que afectar al producto.
Modelo de Greenwood et al (1988)	Un choque a la eficiencia marginal de la inversión incrementa el capital de mañana (k_{t+1}), este último eleva la producción en $t+1$ (y_{t+1}). Entonces, en este modelo, "la producción reacciona a la inversión". Esto sugiere que los choques primero tiene que afectar a la inversión.

"tasa de utilización variable del capital".

6.2. Modelo RBC estándar: inclusión del choque a la inversión

El modelo RBC estándar, como por ejemplo el modelo del Long y Plosser (1983) o el de Campbell (1994), usualmente considera que la variable principal que produce los ciclos económicos es el choque a la productividad. En este modelo el principal mecanismo de transmisión es la elasticidad de sustitución intertemporal del ocio, además, del mecanismo de acumulación del capital. Si en este modelo se evalúa un choque de a la inversión (choque de demanda) en lugar de un choque de productividad (choque de oferta) entonces el modelo tiene problemas para replicar lo observado en los datos. En particular, el modelo sugiere que el consumo cae ante un incremento de la inversión produciendo una correlación negativa entre ambos. Además, el modelo sugiere que la correlación entre el producto y el consumo es negativa. Ambos resultados son claramente opuestos a lo observado en los datos. En esta sección se analiza el modelo de Campbell (1994) desarrollado en capítulo cinco, pero considerando que la economía está sujeta un choque a la inversión.

El choque a la inversión se observa en la ley de movimiento del capital:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + (1 + \epsilon_t)i_t \tag{6.1}$$

La idea detrás de este choque es que la inversión se hace más eficiente; es decir, si con una unidad de inversión, antes, se producia una unidad de capital en "t+1", ahora con el choque, esa misma unidad de inversión produce (1+ϵ_t) unidades de capital en "t+1". Por ejemplo, bajo el supuesto que el choque es igual a uno ($\epsilon_t = 1$): una unidad de inversión produce 2 unidades de nuevo capital, en contraste cuando el choque está ausente, la misma unidad de inversión produce solo 1 unididad de nuevo capital. Uno de los primeros efectos de este choque es que incrementa el stock de capital de "t+1"; es decir, la oferta de capital se expande en "t+1".

Dado que en la restricción presupuestaria de la familia se reemplaza la inversión i_t por su expresión derivada de la ley de movimiento del capital, entonces el choque a la inversión influenciará dicha restricción presupuestaria. Además, esta restricción juega un rol en la optimización de tal manera que la ecuación de Euler también estará afectada por el choque a la inversión.

$$\frac{1}{c_t(1 + \epsilon_t)} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} [r_{t+1} + \frac{(1 - \delta)}{(1 + \epsilon_{t+1})}] \right] \tag{6.2}$$

La ecuación (6.2) muestra la ecuación de Euler modificada por la presencia del choque a la inversión. Es interesante observar que el choque a la inversión ϵ_t fortalece la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo debido a que multiplica la tasa de interés. Este fortalecimiento incentiva a la familia a reducir su consumo actual ($\downarrow c_t$) e incrementar su consumo futuro ($\uparrow c_{t+1}$).

Además, debido a que se elimina el choque a la productividad para solo estudiar el efecto del choque a la inversión, entonces la función de producción quedaría:

$$\begin{aligned} \text{Modelo estándar} &: \quad y_t = a_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \\ \text{Modelo modificado} &: \quad y_t = k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Asimismo, se elimina la ecuación de la productividad $lna_t = \phi lna_{t-1} + \epsilon_t$ y se reemplaza por la ecuación del choque a la inversión:

$$ln\epsilon_t = \phi ln\epsilon_{t-1} + v_t \tag{6.4}$$

6.2.1. Sistema de ecuaciones principales

En el cuadro [6.2] se menciona las ecuaciones no lineales del modelo de Campbell (1994) considerando un choque a la inversión. Como se mencionó previamente, la ley de movimiento del capital, la ecuación de Euler, la función de producción y la ecuación de la productividad han sido modfificados para considerar el choque a la inversión. El resto de ecuaciones se obtiene de manera convencional, tal como se ha detallado en el capítulo cinco.

Cuadro 6.2: Sistema de ecuaciones no lineales principales (modelo de Campbell (1994) con choque a la inversión)

Ecuaciones	Descripción
$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$	Demanda del capital
$\frac{1}{c_t(1+\epsilon_t)} = \beta E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}[r_{t+1} + \frac{(1-\delta)}{(1+\epsilon_{t+1})}]\right]$	Ecuación de Euler
$\theta(1-h_t)^{-\gamma_n} = \frac{w_t}{c_t}$	Oferta de trabajo
$h_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{w_t}$	Demanda de trabajo
$y_t = k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$	Función de producción
$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + (1+\epsilon_t)i_t$	Ley de movimiento del capital
$ln\epsilon_t = \phi ln\epsilon_{t-1} + v_t$	Choque a la inversión

6.2.2. Solución del modelo

El modelo representado por el sistema de ecuaciones descrito en el cuadro [6.2] se escribe en Dynare para encontrar la función de política y de estado (solución). Además, se le pide a Dynare que calcule los momentos teóricos (desviación estándar, correlación y autocorrelación) del componente cíclico de las variables. Para ello se escribe la sentencia "stoch_simul(order = 1, hp_filter=1600)". Esta sentencia le indica a Dynare que linearice el modelo, cuyas variables se han escrito en logarítmo y por tanto, cuando Dynare linealice el modelo, el cambio de variable que hará este preprocesador será $\widehat{x}_t = lnx_t - lnx_{ss}$; es decir, log-linealizará el modelo. Asimismo, la opción "hp_filter=1600" le indica a Dynare que aplique el filtro HP para encontrar el componente cíclico de cada variable. Este modelo está escrito en el siguiente archivo .mod "Campbell_Lvariable_nolineal_log5_inv.mod". Asimismo, la calibración es la misma del modelo descrito en el capítulo cinco.

El cuadro [6.3] muestra la solución del modelo RBC estándar con choque a la inversión. La función de política para el consumo es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
ln(c_t) &= \underbrace{0.1742}_{lnc_{ss}} + 0.5205\widehat{k}_t - 0.2401\widehat{\epsilon}_{t-1} - 0.2528v_t \quad (6.5)\\
ln(c_t) &= lnc_{ss} + 0.5205\widehat{k}_t - 0.2528(\frac{-0.2401}{-0.2528}\widehat{\epsilon}_{t-1} + v_t)\\
ln(c_t) &= lnc_{ss} + 0.5205\widehat{k}_t - 0.2528(0.95\widehat{\epsilon}_{t-1} + v_t)\\
ln(c_t) &= lnc_{ss} + 0.5205\widehat{k}_t - 0.2528\widehat{\epsilon}_t\\
ln(c_t) - lnc_{ss} &= 0.5205\widehat{k}_t - 0.2528\widehat{\epsilon}_t\\
\widehat{c}_t &= 0.5205\widehat{k}_t - 0.2528\widehat{\epsilon}_t \quad (6.6)
\end{aligned}
$$

La ecuación (6.6) sugiere que el consumo responde en dirección opuesta al choque, e indica que si el choque a la inversión se incrementa en 1 % por encima de su estado estacionario, el consumo se reduce en 0.2528 %. Al analizar como reacciona la inversión ante este mismo choque, la función de política de esta variable indica que la inversión se incrementa (ver ecuación (6.7)). Es más, un incremento de 1 % del choque a la inversión incentiva que la inversión se incremente en 2.7368 %. Este incremento en la inversión es muy fuerte en comparación con la reducción del consumo.

$$
\begin{aligned}
ln(i_t) &= \underbrace{-1.2011}_{lni_{ss}} - 1.6972\widehat{k}_t + 2.6\widehat{\epsilon}_{t-1} + 2.7368v_t\\
ln(i_t) - lni_{ss} &= -1.6972\widehat{k}_t + 2.7368(\frac{2.7368}{2.6}\widehat{\epsilon}_{t-1} + v_t)\\
\widehat{i}_t &= -1.6972\widehat{k}_t + 2.7368(0.95\widehat{\epsilon}_{t-1} + v_t)\\
\widehat{i}_t &= -1.6972\widehat{k}_t + 2.7368\widehat{\epsilon}_t \quad (6.7)
\end{aligned}
$$

De la función de política del consumo y de la inversión se infiere que ambas variables se mueven en dirección opuesta ante un choque a la inversión. Esto produce que la correlación entre ambos sea negativa, lo cual es contrario a la evidencia empírica. Esta es una de las principales falencias del modelo RBC estándar cuando se introduce un choque a la inversión.

Cuadro 6.3: Función de política y de estado

	$ln(c_t)$	$ln(i_t)$	$ln(y_t)$	$ln(k_{t+1})$	$ln(h_t)$	$ln(r_t)$	$ln(w_t)$	$ln(\epsilon_t)$
Constante	0.1742	-1.2011	0.3996	3.1810	-0.9890	-3.8810	0.9836	0
$\widehat{k}_t$	0.5205	-1.6972	0.0730	0.9326	-0.3898	-0.9270	0.4628	0
$\widehat{\epsilon}_{t-1}$	-0.2401	2.6000	0.3329	0.0769	0.4991	0.3329	-0.1662	0.95
v_t	-0.2528	2.7368	0.3505	0.0809	0.5254	0.3505	-0.1750	1

Nota: los resultados se han obtenido de "Campbell_Lvariable_Dynare_nolineal_log5_inv.mod"

Otra falencia del modelo, relacionada con la anterior, es que el consumo se mueve de manera contracíclica. Al observar la función de política del producto, se espera que este

aumente ante un choque a la inversión. Por tanto, bajo este choque se tiene que en "t": la inversión y el producto se incrementan, mientras que el consumo se reduce. Este comportamiento lleva a que la correlación entre el producto y el consumo sea negativa, lo cual no es avalado por la evidencia empírica.

Para evaluar los efectos dinámicos del choque de inverión se procede a calcular la función impulso-respuesta. En la siguiente sección se detalla el comportamiento de las variables endógenas ante este choque.

6.2.3. Funciones impulso-respuesta

La figura [6.1], gráficos de líneas continuas, muestra la respuesta dinámica de cada una de las variables del modelo ante un choque a la inversión. A continuación se describe los efectos de este choque.

En primer lugar, el choque a la inversión fortalece la sustitución intertemporal del consumo (SIC), llevando a la familia representativa a reducir su consumo actual y aumentar su consumo futuro. Este efecto se puede observar claramente en al ecuación de Euler (ecuación (6.8)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_t(1+\epsilon_t)} &= \beta E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}[r_{t+1}+\frac{(1-\delta)}{(1+\epsilon_{t+1})}]\right] \\ \frac{1}{c_t} &= \beta E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}\underbrace{(1+\epsilon_t)}_{\text{Fortalece SIC}}\underbrace{[r_{t+1}+\frac{(1-\delta)}{(1+\epsilon_{t+1})}]}_{\text{Móvil de la SIC}}\right] \end{aligned} \tag{6.8}$$

En segundo lugar, dada la reducción del consumo actual, en el equilibrio del mercado de bienes se observa que la inversión se reduce debido a que, en prinicipio, la producción no se mueve: $y_t =\downarrow c_t + \uparrow i_t$.

En tercer lugar, el choque a la inversión y el incremento del nivel de inversión incentivan a la creación de nuevo capital k_{t+1}. Esto se observa en la ley de movimiento del capital:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + (1+\epsilon_t)i_t \\ \uparrow k_{t+1} &\underbrace{=}_{\leftarrow} (1-\delta)k_t + (1+\uparrow\epsilon_t)\uparrow i_t \end{aligned} \tag{6.9}$$

En cuarto lugar, la reducción del consumo produce un efecto riqueza negativo sobre la oferta de trabajo incentivando a la familia a incrementar su número de horas trabajadas. Por tanto, la oferta de trabajo se expande (desplazamiento hacia abajo). Este primer efecto en el mercado laboral, en el que la demanda de trabajo no se mueve aún, lleva a que el salario de equilibrio disminuya y el trabajo aumente.

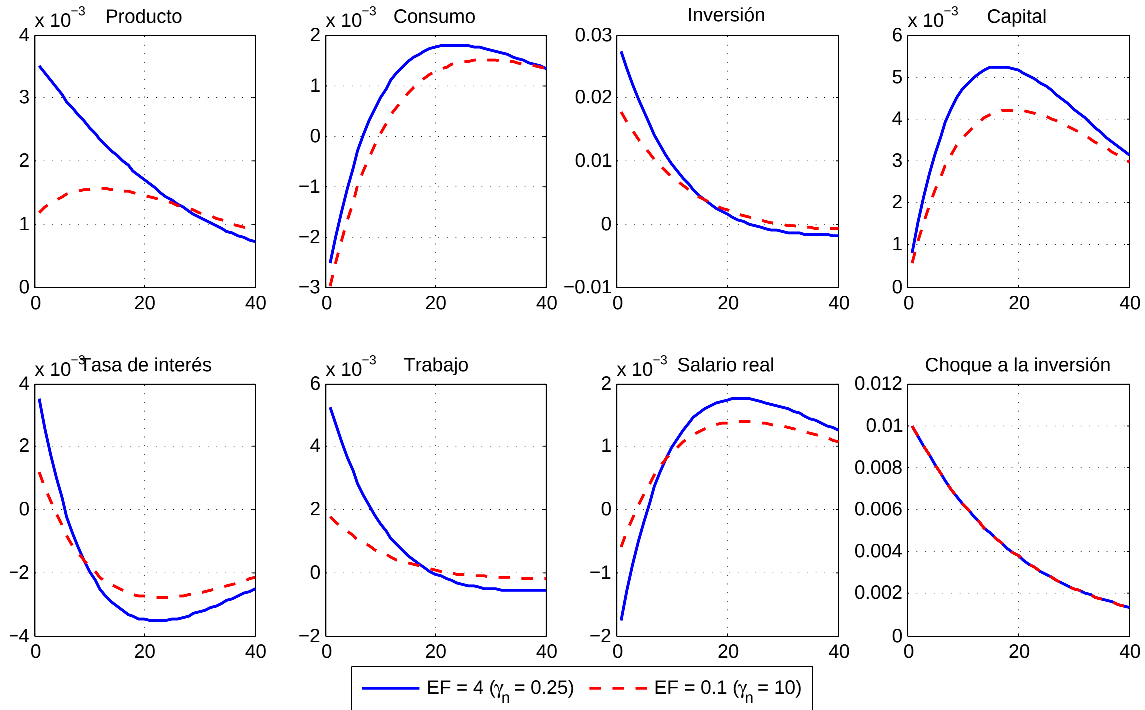
En quinto lugar, el incremento de horas trabajadas incentiva una mayor producción ($\uparrow y_t = k_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$) por parte de las empresas. Esto lleva a que la productividad marginal de cada uno de los factores se incremente ($\uparrow PMgh_t$ y $\uparrow PMgk_t$), y por tanto las empresas

incrementen la demanda de cada uno de los factores de producción.

En sexto lugar, el incremento o desplazamiento a la derecha de $PMgk_t$ eleva la tasa de interés actual dado que la oferta de capital es fija. De otro lado, el incremento de la demanda de trabajo agrega un efecto adicional positivo sobre el trabajo ($\uparrow h_t$) e incrementa el salario real ($\uparrow w_t$), contrarrestando parcialmente la reducción inicial del salario. En el neto, el trabajo se incrementa y el salario real se reduce.

Por tanto, un choque a la inversión en "t" incentiva que el consumo y el salario real se contraiga y la producción, el capital en "t+1", el empleo, la tasa de interés se incremente en el mismo periodo. Dado que el choque pierde fuerza en los siguientes periodos pero que aún se mantiene por encima del estado estacionario, entonces el consumo progresivamente se recuperará debido a que la tasa de interés empezará a reducirse. Este comportamieto de las variables es similar a lo observado en las funciones de política y de estado, analizado previamente.

Figura 6.1: Modelo de Campbell (1994) con choque a la inversión



Nota: "EF" significa Elasticidad de Frisch ($1/\gamma_n$) o también conocido como elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo. Esta figura se obtiene del archivo "Campbell_Lvariable_nolineal_log5_inv.mod".

En este punto cabe preguntarse si el modelo RBC estándar podría mejorar (obtener un incremento del consumo en lugar de una reducción) si la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo es mayor; es decir, si la oferta de trabajo es más elástica. Con esta idea en mente, en la figura [6.1] se muestra la función impulso-respuesta del modelo RBC estándar con dos elasticidades de oferta de trabajo diferentes. Se observa que aunque el modelo tenga una Elasticidad de Frisch alta (EF=4), el modelo aún mantiene una

caida del consumo ante un choque a la inversión. Además, se observa que la reducción del consumo es muy similar en ambos casos, lo que indica que aunque el mecanismo de transmisión usual del modelo RBC (elasticidad intertemporal del trabajo) se fortalezca, el modelo sigue mostrando la misma debilidad (reducción del consumo). Es más, es importante mecionar que estos resultados se obtienen de comparar una econompia con una elasticidad excesivamente alta (EF=4) en contraste con una elasticidad muy pequeña (EF = 0.1). Para valores intertemedios, probablemente no exista efecto sobre el consumo dejando en niveles negativos (por debajo de su estado estacionario).

Un segundo cuestionamiento es si la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo (ESIC) podría ayudar a mejorar el modelo. En ese sentido, la figura [6.2] ilustra los efectos de un modelo con baja y alta ESIC. Antes de analizar dicha figura es necesario hacer algunas acotaciones sobre la función de utilidad para que la ESIC quede explícita en el modelo. Dado que el modelo de Campbell (1994) asume que dicha elasticidad es igual a uno y por tanto la función de utilidad es logarítmica en el consumo, entonces resulta necesario modificar la función de utilidad (versión más general) para que considere este parámetro explicitamente. La ecuación (6.10) muestra la función de utilidad de Campbell (1994), mientras que la ecuación (6.11) muestra una función de utilidad genérica.

$$\text{Función de utilidad de Campbell (1994)} \quad : \quad u(c_t, h_t) = ln(c_t) + \theta\frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \tag{6.10}$$

$$\text{Función de utilidad general} \quad : \quad u(c_t, h_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \theta\frac{(1-h_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \tag{6.11}$$

Donde el parámetro γ representa la inversa de la elasticidad intertemporal del consumo. Bajo la función de utilidad descrita en la ecuación (6.11) se obtiene la siguiente ecuación de Euler:

$$\frac{1}{c_t^{\gamma}(1+\epsilon_t)} = \beta E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}^{\gamma}}[r_{t+1} + \frac{(1-\delta)}{(1+\epsilon_{t+1})}]\right] \tag{6.12}$$

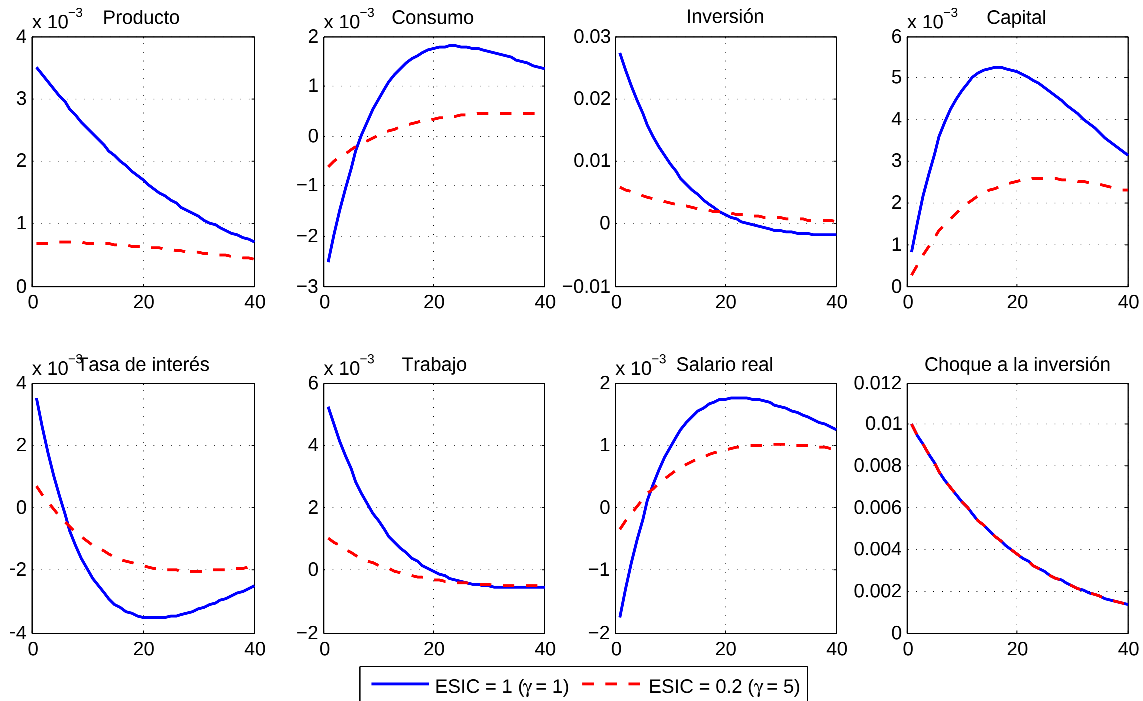
En la ecuación (6.12) se observa como el parámetro γ controla la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo. Esto se aprecia mejor en la versión log-lineal de esta ecuación:

$$\widehat{c}_t = E_t\big[\widehat{c}_{t+1} - \frac{1}{\gamma}(A\widehat{r}_{t+1} - \frac{1}{2}(B\widehat{\epsilon}_{t+1} - \widehat{\epsilon}_t))\big], \quad A = \frac{2r_{ss}}{2r_{ss}+(1-\delta)} \wedge B = \frac{1-\delta}{2r_{ss}+(1-\delta)} \tag{6.13}$$

En la ecuación (6.13) se observa claramente que un incremento en la ESIC ($1/\gamma$) incentiva a la familia a reducir su consumo actual por el consumo futuro. Es más, se observa también que dicha elasticidad fortalece o amplifica el efecto del choque a la inversión, produciendo que el consumo se reduzca más. La pregunta que surge en este escenario, como se mencionó antes, es si el modelo RBC estándar mejora su capacidad cuando se considera una ESIC menor, de tal manera que no se amplifique mucho sus efectos. *A priori* se observa que independientemente sea el valor de ESIC, el choque a la inversión tiene un efecto negativo sobre el consumo. Lo único que puede hacer una menor magnitud de ESIC es reducir el efecto del choque pero no hacer que el consumo se incremente. Por tanto, dado

que la ESIC controla el efecto sustitución, el cual siempre será negativo para el consumo, entonces lo que se requiere para que el consumo se incremente ante el choque a la inversión es un efecto ingreso significativo que anule completamente este efecto sustitución, y es esto lo que justamente está ausente en el modelo RBC estándar.

Figura 6.2: Modelo de Campbell (1994) con choque a la inversión



Nota: "ESIC" significa Elasticidad de Sustitución Intertemporal del Consumo ($1/\gamma$). Esta figura se obtiene del archivo "Campbell_Lvariable_nolineal_log5_inv.mod".

En línea con lo anterior, la figura [6.2] sugiere que la presencia de un menor ESIC en la economía artificial reduce la amplificación del choque a la inversión. Esto se observa en que la función impulso-respuesta de todas las variables tienen menor magnitud y vuelven más rapidamente al estado estacionario cuando la ESIC es baja. Por ejemplo, el producto reacciona tres veces menos en un modelo con baja ESIC (=0.1), en comparación con una economía de alta ESIC (=1). Asimismo, se observa que con una ESIC baja (=0.1), el consumo no se reduce tanto; sin embargo, en el equilibrio aún se mantiene por debajo de su estado estacionario.

En conclusión, el modelo RBC estándar brinda resultados contradictorios a los datos cuando se introduce un choque a la inversión. Inclusive estos resultados se mantienen cuando el mecanismo de transmisión via elasticidad de sustitución de la oferta de trabajo se incrementa o cuando la elasticidad de sustitución del consumo se reduce. Lo que falta para mejorar el modelo es quizá un mecanismo de transmisión distinto y/o un efecto ingreso significativo, aunque Barro y King (1984) sugieren que este último no es suficiente.

6.2.4. Comparación del modelo con los datos

Con el fin de confirmar lo encontrado en la solución del modelo y en la función impulso-respuesta, en esta sección se muestra los estadísticos que el modelo infiere. Estos estádisticos son comparados con los datos para evaluar cuan lejos se encuentra el modelo de la realidad. El cuadro [6.11] contiene tres estadísticos: desviación estándar, correlación del PBI con las demás variables macroeconómicas y la correlación del consumo con las otras variables del modelo. De este cuadro se pueden mencionar las siguiente conclusiones: en primer lugar, se observa que la correlación del PBI con el consumo es positiva en los datos; sin embargo, el modelo sugiere que esta correlación es negativa.

En segundo lugar, el modelo predice que la correlación del PBI con el salario real es negativa; sin embargo, los datos indican que es positiva. Esto sugiere que el modelo carece de alguna variable que permita que el salario real se mueva prociclicamente. Aunque el choque de productividad en el modelo RBC estándar no captura el comportamiento *cuantitativo* del salario real, pero si captura su comportamiento *cualitativo.* Es decir, el modelo bajo un choque de productividad infiere que el salario real es procíclico, pero con un valor de 0.9423, el cual es mucho mayor al observado (0.12).

En tercer lugar, el modelo indica que la correlación del consumo con la inversión, el producto y el trabajo es negativa. Es decir, el consumo se mueve en dirección opuesta a estas variables, lo cual contrasta con la evidencia empírica que indica que estas variables se mueven en la misma dirección.

En cuarto lugar, el modelo produce una desviación estándar muy por debajo de lo encontrado en los datos excepto para la tasa de interés. Esto sugiere que el modelo necesita otro mecanismo de transmisión que amplifique con mayor fuerza el choque a la inversión. Esta falencia del modelo se observa inclusive con una persistencia alta del choque ($\phi = 0.95$) y un valor significativo de este choque ($\sigma_v = 0.1$). Bajo estos mismos parámetros, el choque de productividad en el modelo de Campbell (1994) descrito en el capítulo cinco produce un mejor desempeño del modelo. Por ejemplo, para el consumo se obtiene una desviación estándar de 0.77 % en contraste con 0.37 % del modelo con choque a la inversión. De igual forma se observa para el producto, el modelo con choque de productividad obtiene un valor de 2.22 % para dicho estadístico en comparación con el pobre desempeño del modelo con choque a la inversión (0.46 %).

Todo esto confirma lo analizado en las secciones previas: que el modelo RBC estándar tiene problemas para acercarse a los datos cuando se considera un choque a la inversión. Esto se encuentra en línea con Barro y King (1984), quienes indicaron que en el modelo neoclásico un movimiento en la demanda de inversión produce un incremento en la tasa de interés y en el producto, pero reduce el consumo. Este comportamiento no se ajusta con los patrones típicos observados en los datos. En este escenario surge la interrogante ¿Qué elementos se deben de considerar dentro del modelo RBC estándar para que replique los datos ante un choque a la inversión? En 1988, Jeremy Greenwood, Zvi Hercowitz y Gregory W. Huffman propusieron algunas modificaciones al modelo RBC estándar que permitio superar estas debilidades.

Cuadro 6.4: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empíricos

	Datos		Modelo		
Variable (x_t)	Des. Est. (%)	Corr (PBI, x_t)	Des. Est. (%)	Corr (PBI, x_t)	Corr (c_t, x_t)
Consumo	1.35	0.88	0.37	-0.82	1
Inversión	5.30	0.8	3.57	0.97	-0.93
Producto	1.81	1	0.46	1	-0.83
Capital			0.36	0.42	0.16
Trabajo	1.79	0.88	0.69	0.97	-0.94
Tasa de interés	0.30	-0.35	0.54	0.75	-0.99
Salario real	0.68	0.12	0.27	-0.75	0.99

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de King y Rebelo (1999) y todas las variables están en logarítmo natural, excepto la tasa de interés. Mientras los valores teóricos se han obtenido de una sola simulación. Estos valores se obtiene del archivo "Campbell_Lvariable_nolineal_log5_inv.mod".

6.3. Modelo RBC extendido: inclusión del choque a la inversión y utilización variable del capital

6.3.1. Elementos del modelo

En esta sección se sigue de cerca el modelo propuesto por Greenwood et al (1988). Cabe mencionar que en el articulo original de estos autores, el modelo se plantea desde el punto de vista del planificador central; no obstante, en este capítulo se desarrolla la versión desentralizada cuyos resultados son similares debido al contexto competitivo en el que se desarrolla el modelo.

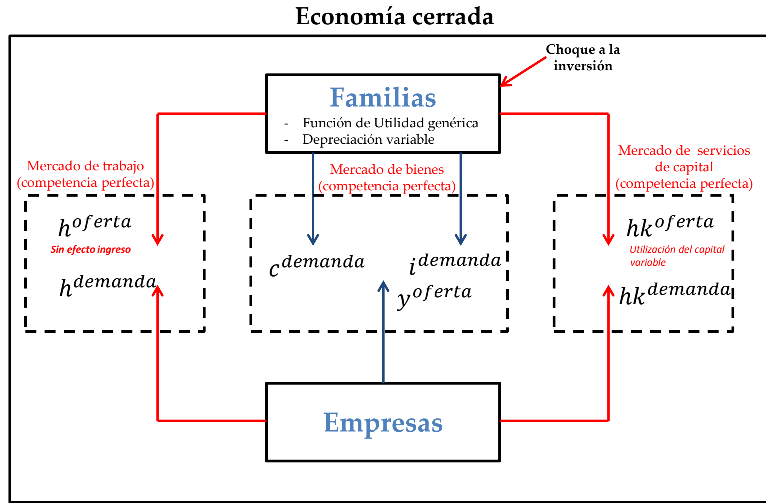
De otro lado, la economía de este modelo está poblada por familias que viven una vida infinita y por empresas. Ambos agentes se desarrollan en un ambiente competitivo tanto en el mercado de bienes como en el de factores. Asimismo, se asume que esta economía es cerrada y no hay presencia del gobierno.

Además de lo anterior, este modelo tiene tres características distintivas con respecto a los modelos estudiados en capítulos previos: la primera es que la función de utilidad elimina el efecto ingreso en la oferta de trabajo. La segunda es que la empresa no demanda bienes de capital como en los modelos RBC estándar, sino que demanda "servicios de capital", el cual representa la productoria del número de horas que se utiliza el capital por el número de bienes de capital. Por ejemplo, en los modelos RBC previos se considera que la empresa demanda 100 computadoras (bienes de capital); sin embargo, en este modelo no solo se considera lo anterior sino que también la tasa de utilización de este capital, el cual por ejemplo puede ser 3 horas al día. Considerando ambos elementos, el "servicio de capital" demandado es 300 (100x3).

La tercera característica es que se asume que la mayor utilización del capital induce a que este se deprecie con mayor velocidad. Finalmente, se considera que el choque a la inversión hace que dicha inversión sea más productiva en la generación de nuevos bienes de capital. Este efecto se observa en la ley de movimiento del capital.

En la figura [6.3] se esboza las relaciones entre los agentes: en primer lugar, las familias ofrecen horas laborales y servicios de capital; en segundo lugar, las empresas demandan ambos servicios en el mercado de factores. Finalmente, la economía está sujeta a un choque a la inversión, la cual afecta primeramente el comportamiento de las familias y luego a las empresas.

Figura 6.3: Esquema del modelo de Greenwood et al (1988)



Familias

[A] La función de utilidad: la función de utilidad de Greenwood et al (1988) está descrito por la siguiente expresión:

$$\underline{\text{U}}(c_t, l_t) = U(c_t - G(l_t)) \tag{6.14}$$

La cual tiene las siguientes características:

$\dot{U} > 0$	$\ddot{U} < 0$	$\dot{G} > 0$	$\ddot{G} > 0$

En esta función de utilidad se puede calcular la utilidad marginal del consumo ($\underline{\text{U}}_1$) y la utilidad marginal del trabajo ($\underline{\text{U}}_2$), las cuales se expresa de la siguiente manera:

$$\underline{\text{U}}_1 = \frac{\partial \underline{\text{U}}}{\partial c_t} = \frac{\partial U(c_t - G(l_t))}{\partial c_t} = \dot{U} \cdot \left(\frac{\partial (c_t - G(l_t))}{\partial c_t} \right) = \dot{U} \tag{6.15}$$

$$\underline{\text{U}}_2 = \frac{\partial \underline{\text{U}}}{\partial l_t} = \frac{\partial U(c_t - G(l_t))}{\partial l_t} = \dot{U} \cdot \left(\frac{\partial (c_t - G(l_t))}{\partial l_t} \right) = -\dot{U}\dot{G} \tag{6.16}$$

Asimismo, la expresión de la tasa marginal de sustitución entre el consumo y el trabajo (en estricto debería ser el ocio) está representado por:

$$TMgS_{c_t,l_t} = -\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{-\dot{U}\dot{G}}{\dot{U}} = \dot{G} \tag{6.17}$$

Esta expresión es la característica principal de la función de utilidad propuesta por Greenwood et al (1988): la $TMgS_{c_t,l_t}$ solo depende del trabajo l_t y no depende del consumo c_t. Como se verá más adelante, en la optimización de la familia, esto es importante porque permite obtener una oferta de trabajo sin la presencia del consumo c_t; es decir, sin el efecto ingreso. En otras palabras, el efecto de la sustitución intertemporal del consumo sobre el l_t es eliminado, y "l_t es determinado independientemente de la elección intertemporal consumo/ahorro". Además, esta última característica es importante porque permite enfatizar el "mecanismo de transmisión" del choque a la inversión en este modelo.

La expresión (6.18) es la forma funcional de la función de utilidad de Greenwood et al (1988):

$$\underline{U}(c_t, l_t) = \frac{1}{1-\gamma}\left[\left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{1-\gamma} - 1\right] \tag{6.18}$$

Donde la tasa marginal de sustitución marginal entre el consumo y el trabajo $TMgS_{c_t,l_t}$ tiene la siguiente expresión:

$$TMgS_{c_t,l_t} = l_t^{\theta} \tag{6.19}$$

La expresión de la $TMgS_{c_t,l_t}$ derivada de la función de utilidad de Greenwood et al (1988) es distinta a los modelos RBC usuales. Por ejemplo, el modelo de Campbell (1994) asume una función de utilidad de la siguiente forma:

$$U(c_t, l_t) = u(c_t) + u(l_t) = lnc_t + \theta\frac{(1-l_t)^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \tag{6.20}$$

Al calcular la $TMgS_{c_t,l_t}$ de esta función de utilidad se tiene:

$$TMgS_{c_t,l_t} = -\frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{U}_1} = -\frac{-(1-l_t)^{-\gamma_n}}{c_t^{-1}} = c_t(1-l_t)^{-\gamma_n} \tag{6.21}$$

Claramente se observa que la $TMgS_{c_t,l_t}$ de esta función de utilidad depende del trabajo y también del consumo y por tanto se mantiene el efecto riqueza en la oferta de trabajo.

[B] **La ley movimiento del capital:** en este modelo, como se menciono previamente, la familia no solo ofrece bienes de capital "k_t", sino tambien intensidad de uso de ese capital "h_t", los cuales en su conjunto representan "**servicios de capital**" ($k_t h_t$). Asimismo, el capital evoluciona según su ley de movimiento:

$$k_{t+1} = (1-\delta(h_t))k_t + (1+\epsilon_t)i_t \tag{6.22}$$

De la ecuación (6.22) emergen tres observaciones: la primera es que la ecuación (6.20) se puede ver como una función de producción de "capital nuevo" (k_{t+1}), el cual tiene como "inputs" a la inversión (i_t) y al stock de capital (k_t). La segunda es que la eficiencia marginal de la inversión está definida por:

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial i_t} = 1 + \epsilon_t \tag{6.23}$$

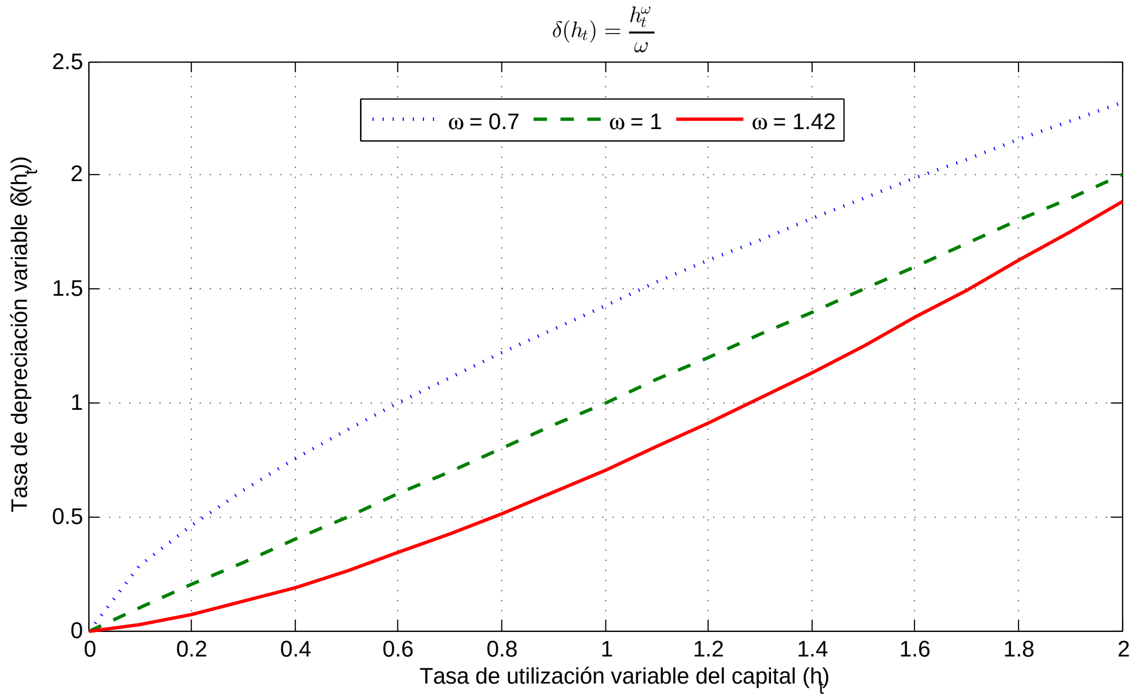
Esta ecuación indica que si no hay choque ($\epsilon_t = 0$) entonces 1 unidad de i_t se convierte en 1 unidad de k_{t+1}. Pero si $\epsilon_t > 0$ entonces 1 unidad de i_t se hace más productiva (eficiente) porque produce $(1 + \epsilon_t)$ unidades de k_{t+1}.

La tercera es que $\delta(h_t)$ representa la **depreciación endógena**. La cual expresa que una mayor utilización del capital (k_t) provoca una mayor depreciación del mismo debido a: [1] mayor deterioro con el uso, [2] menos tiempo para mantenimiento. La forma funcional de la depreciación considerada en el modelo es la siguiente:

$$\delta(h_t) = \frac{h_t^{\omega}}{\omega} \tag{6.24}$$

Esta función cumple con tres características: en primer lugar tiene pendiente positiva ($\dot{\delta} > 0$) para reflejar que la mayor utilización implica una mayor depreciación del stock de capital. En segundo lugar, la segunda derivada de esta función también es positiva $\ddot{\delta} > 0$, lo cual sugiere que la aceleración en la utilización (o un uso intensivo) del capital induce que el stock de capital se deprecie rápidamente.

Figura 6.4: Depreciación variable: dependiente de la utilización del capital



En tercer lugar, el valor de ω debe ser positivo y mayor a uno para que cumpla con las dos propiedades mencionadas ($\dot{\delta} = h_t^{\omega-1} > 0$ y $\ddot{\delta} = (\omega - 1)h_t^{\omega-2} > 0$). En la figura [6.4] se observa tres valores de ω, se puede observar que para valores menores o iguales a uno, la función δ no cumple con las propiedades mencionadas. En este modelo se elige un valor de ω (=1.42) que permita obtener un valor de estado estacionario de la depreciación de

0.1 ($\delta_{ss} = 0.1$). Además, dado que por definición δ debe ser menor o igual a uno, el valor de h_t queda acotado a valores menores a 1.3 apróximadamente.

En conclusión, la ecuación del movimiento del capital es de vital importancia en el modelo porque incluye el **mecanismo de impulso** "choque a la eficiencia marginal de la inversión (ϵ_t)" y **mecanismo de propagación** "la utilización variable del capital (h_t)".

[C] Restricción presupuestaria: la familia representativa destina recursos a la adquisición de bienes de consumo (c_t) y bienes de inversión (i_t). Sus ingresos se derivan del salario real (w_t) obtenido por ofrecer trabajo y de la renta de alquiler (r_t^k) de servicios de capital ($k_t h_t$). La igualdad entre los ingresos y los egresos representa la restricción presupuestaria, la cual está descrita por la ecuación (6.25).

$$c_t + i_t = w_t l_t + r_t(k_t h_t) \tag{6.25}$$

[D] El problema de optimización: la familia busca maximizar su función de utilidad $\underline{\text{U}}(c_t, l_t)$ esperada descontada, donde c_t es el consumo del único bien producido en la economía y l_t es el trabajo. En este modelo, a diferencia del modelo RBC estándar, la familia también decide la tasa de utilización variable del capital óptima h_t que ofrecerá en el mercado de bienes de capital. Esto se debe a que dicha variable h_t influye sus ingresos ($k_t h_t$), y afecta la decisión consumo-inversión de la familia. Por tanto, las cuatro variables de control son: consumo c_t, el trabajo l_t, la tasa de utilización del capital h_t, y el nuevo capital k_{t+1}. Con estas consideraciones, el problema de optimización de las familias esta descrito por la siguiente expresión:

$$\underset{\{c_t, l_t, h_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \underline{\text{U}}(c_t, l_t)$$

Sujeto a la restricción presupuestaria y a la ley de movimiento del capital:

$$\begin{aligned} c_t + i_t &= w_t l_t + r_t(k_t h_t) &(6.26)\\ k_{t+1} &= (1 - \delta(h_t))k_t + (1 + \epsilon_t) i_t &(6.27) \end{aligned}$$

Donde: $\delta(h_t) = \frac{h_t^{\omega}}{\omega}$ y $\underline{\text{U}}(c_t, l_t) = \frac{1}{1-\gamma}\left[\left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{1-\gamma} - 1\right]$. Estas dos restricciones se pueden resumir en una sola al reemplazar el valor de la inversión, la cual se despeja de la ley de movimiento del capital, en la restricción presupuestaria. Entonces la única restricción quedaría:

$$\underbrace{c_t + \frac{k_{t+1}}{1+\epsilon_t} - (1 - \delta(h_t))\frac{k_t}{1+\epsilon_t}}_{egresos_t} = \underbrace{w_t l_t + r_t(k_t h_t)}_{ingresos_t} \tag{6.28}$$

Con la función objetivo y la única restricción (ecuación (6.28)) se construye la función de Lagrange:

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\underline{\text{U}}(c_t, l_t) + \lambda_t[ingresos_t - egresos_t]\right]$$

Condiciones de primer orden: A continuación se obtienen las derivadas de la función de Lagrange con respecto a cada una de las variables de control (c_t, l_t, h_t y k_{t+1}).

Derivada con respecto al consumo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \quad \xrightarrow{\textbf{ent.}} \quad \underline{\mathrm{U}}_1 + \lambda_t[-1] = 0 \quad \xrightarrow{\textbf{ent.}} \quad \underline{\mathrm{U}}_1 = \lambda_t \tag{6.29}$$

Donde: $\underline{\mathrm{U}}_1 = \left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}$. Por tanto:

$$\underline{\mathrm{U}}_1 = \left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma} = \lambda_t \tag{6.30}$$

Derivada con respecto al trabajo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_t} = 0 \quad \xrightarrow{\textbf{ent.}} \quad \underline{\mathrm{U}}_2 + \lambda_t[w_t] = 0 \quad \xrightarrow{\textbf{ent.}} \quad \underline{\mathrm{U}}_2 = -\lambda_t w_t \tag{6.31}$$

Donde: $\underline{\mathrm{U}}_2 = \left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}(-l_t^{\theta})$. Por tanto:

$$\underline{\mathrm{U}}_2 = \left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}(-l_t^{\theta}) = -\lambda_t w_t \tag{6.32}$$

De la ecuación (6.30) y (6.32) se obtiene la **oferta de trabajo**:

$$\frac{\underline{\mathrm{U}}_2}{\underline{\mathrm{U}}_1} = -w_t \tag{6.33}$$

$$\frac{\left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}(-l_t^{\theta})}{\left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}} = -w_t$$

$$l_t^{\theta} = w_t \tag{6.34}$$

Esta oferta de trabajo es particular: no tiene un efecto ingreso; es decir, no aparece el consumo. Esto se debe a la forma de la función de utilidad de la cual se deriva que la tasa marginal de sustitución entre el consumo y el trabajo solo depende del trabajo.

Derivada con respecto a la utilización variable del capital:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_t} = 0 \xrightarrow{\textbf{ent.}} \lambda_t\left[r_t k_t - \frac{\dot{\delta}(h_t)k_t}{1+\epsilon_t}\right] = 0 \tag{6.35}$$

Debido a que λ_t es igual a la utilidad marginal del consumo ($\partial U(c_t, l_t)/\partial c_t$), la cual es positiva, entonces la única manera para que la ecuación (6.35) se cumpla es que la expresión entre corchetes sea igual a cero. Por tanto se tiene:

$$\underbrace{r_t k_t = \frac{\dot{\delta}(h_t)k_t}{1+\epsilon_t}}_{\substack{\text{Oferta de utilización} \\ \text{variable del capital}}} \tag{6.36}$$

Derivada con respecto al nuevo capital:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \quad \overset{\textbf{ent.}}{\longrightarrow} \quad \lambda_t\left[-\frac{1}{1+\epsilon_t}\right] + E_t\beta\lambda_{t+1}\left[r_{t+1}h_{t+1} + \frac{1-\delta(h_{t+1})}{1+\epsilon_{t+1}}\right] = 0 \tag{6.37}$$

De lo anterior se obtiene condición de optimalidad de la inversión:

$$\begin{aligned} \lambda_t\left[\frac{1}{1+\epsilon_t}\right] &= E_t\beta\lambda_{t+1}\left[r_{t+1}h_{t+1} + \frac{1-\delta(h_{t+1})}{1+\epsilon_{t+1}}\right] \\ \left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[\frac{1}{1+\epsilon_t}\right] &= \beta E_t\left(c_{t+1} - \frac{l_{t+1}^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[r_{t+1}h_{t+1} + \frac{1-\delta(h_{t+1})}{1+\epsilon_{t+1}}\right] \end{aligned} \tag{6.38}$$

Empresa

Por el lado de las firmas, estas buscan maximizar su función de beneficios (π_t) en cada periodo sujeta a su función de producción, tal como se muestra en la siguiente expresión:

$$\underset{\{l_t,h_t\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} \; \pi_t = y_t - [w_t l_t + r_t(k_t h_t)]$$

Sujeto a la función de producción:

$$y_t = F(k_t h_t, l_t) \tag{6.39}$$

Introduciendo la función de producción en la función de beneficios y derivando con respecto a las variables de control se obtiene las siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial l_t} = 0 \quad \overset{\textbf{ent.}}{\longrightarrow} \quad F_2 - w_t = 0 \quad \overset{\textbf{ent.}}{\longrightarrow} \quad \underbrace{F_2 = w_t}_{\text{Demanda de trabajo}} \tag{6.40}$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial h_t} = 0 \quad \overset{\textbf{ent.}}{\longrightarrow} \quad F_1 k_t - R_t^k k_t = 0 \quad \overset{\textbf{ent.}}{\longrightarrow} \quad \underbrace{F_1 = R_t^k}_{\text{Demanda de servicios de capital}} \tag{6.41}$$

Considerando que la función de produccion tiene la siguiente especificación:

$$F(k_t h_t, l_t) = (h_t k_t)^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \tag{6.42}$$

Ambas demandas quedarían expresadas de la siguiente manera:

$$\text{Demanda de trabajo} \;:\; (1-\alpha)\frac{y_t}{l_t} = w_t \tag{6.43}$$

$$\text{Demanda de servicios de capital} \;:\; \alpha\frac{y_t}{h_t k_t} = r_t \tag{6.44}$$

Equilibrio de mercado y definición del choque

Para completar el modelo es necesario agregar dos ecuaciones. La primera ecuación hace referencia al equilibrio en el mercado de bienes, la cual está descrito por la siguiente expresión:

$$y_t = c_t + i_t \tag{6.45}$$

La segunda ecuación describe el comportamiento del choque a la inversión, que se comporta como un AR(1):

$$\epsilon_t = \rho\epsilon_{t-1} + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(0, \sigma_\nu^2) \tag{6.46}$$

Donde ν_t es propiamente el choque a la inversión.

Sistema de ecuaciones principales

El cuadro [6.12] muestra las ecuaciones que describen el comportamiento óptimo de las familias como de las empresas; asi también indica las ecuaciones de equilibrio de mercado y del comportamiento del choque a la inversión. Todo este conjunto de ecuaciones forman un sistema que representa al modelo RBC propuesto por Greenwood et al (1988).

Cuadro 6.5: Sistema de ecuaciones no lineales principales

Ecuaciones	Descripción
$\left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[\frac{1}{1+\epsilon_t}\right] = \beta E_t\left(c_{t+1} - \frac{l_{t+1}^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[r_{t+1}h_{t+1} + \frac{1-\delta_{t+1}}{1+\epsilon_{t+1}}\right]$	Ecuación de Euler
$r_t = \frac{h_t^{\omega-1}}{1+\epsilon_t}$	Oferta de servicios de capital
$r_t = \alpha\frac{y_t}{h_t k_t}$	Demanda del servicios de capital
$l_t^\theta = w_t$	Oferta de trabajo
$w_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{l_t}$	Demanda de trabajo
$y_t = (h_t k_t)^\alpha l_t^{1-\alpha}$	Función de producción
$y_t = c_t + i_t$	Equilibrio mercado de bienes
$k_{t+1} = (1-\delta_t)k_t + (1+\epsilon_t)i_t$	Ley de movimiento del capital
$\delta_t = \frac{h_t^\omega}{\omega}$	Tasa de depreciación variable
$\epsilon_t = \phi\epsilon_{t-1} + \nu_t$	Choque a la inversión

Calibración

Los valores asociados a los parámetros de este modelo se obtienen de la siguiente manera. Para calcular el valor de α, considera el promedio anual de la proporción del capital en el ingreso nacional entre 1948 y 1985. De otro lado, la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo $1/\theta$ se encuentra entre 0.3 y 2.2 (Macurdy, 1981; Heckman y Macurdy, 1980 y 1982). El valor que inicialmente se elige es 1.7, el cual permite obtener un valor de $\theta = 0.6$. Sin embargo, vale la pena hacer análisis de sensibilidad de este parámetro.

En cuanto a la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo (ESIC), se plantean dos valores: $\gamma = 1$ y $\gamma = 2$. La simulación del modelo contemplará

ambos valores con el fin de comparar los efectos del choque a la inversión en una economía con alta ESIC ($1/\gamma = 1$) en contraste con una economia con baja ESIC ($1/\gamma = 1/2$).

De otro lado, la elasticidad de la depreciación con respecto al consumo ω es calibrado de tal manera que la tasa de depreciación de estado estacionario sea igual a 0.1. Asimismo, los dos parámetros del comportamiento del choque a la inversión: magintud de choque (σ : desviación estándar) y la persistencia del choque (ϕ : autocorrelación de primer orden) son calibrados para reproducir la desviación estándar y la correlación serial de primer orden, observado en los datos, del producto. Entonces para $\gamma = 1$, se tiene que $\sigma = 0.05$ y $\phi = 0.47$, y para $\gamma = 2$, se tiene que $\sigma = 0.0515$ y $\phi = 0.51$. En el cuadro [6.6] se indica los valores asociados a cada parámetro.

Cuadro 6.6: Calibración

Parámetro	Valor	Observación
β	0.96	Factor de descuento
α	0.29	Proporción del capital en el ingreso nacional (promedio anual entre 1950 - 1985)
θ	0.6	Inversa de la elasticidad de la oferta de trabajo (elasticidad de Frisch de 1.7)
γ	1 - 2	Coeficiente relativo de aversión al riesgo o inversa de la ESIC
ω	1.42	Elasticidad de la depreciación con respecto a la tasa de utilización (para que $\delta_{ss} = 0.1$)
σ	0.05 - 0.0515	Desviación estándar del choque a la inversión ϵ_t
λ	0.47 - 0.51	Coeficiente de autocorrelación de 1er orden del choque (persistencia)

Estado estacionario

En el cuadro [6.7] se escriben la ecuaciones del modelo en su representación de estado estacionario.

Cuadro 6.7: Sistema de ecuaciones no lineales principales

Ecuaciones	Descripción
[1] $\left(c_{ss} - \frac{l_{ss}^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[\frac{1}{1+\epsilon_{ss}}\right] = \beta E_t\left(c_{ss} - \frac{l_{ss}^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[r_{ss}h_{ss} + \frac{1-\delta_{ss}}{1+\epsilon_{ss}}\right]$	Ecuación de Euler
[2] $r_{ss} = \frac{h_{ss}^{\omega-1}}{1+\epsilon_{ss}}$	Oferta de servicios de capital
[3] $r_{ss} = \alpha\frac{y_{ss}}{h_{ss}k_{ss}}$	Demanda del servicios de capital
[4] $l_{ss}^{\theta} = w_{ss}$	Oferta de trabajo
[5] $w_{ss} = (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{l_{ss}}$	Demanda de trabajo
[6] $y_{ss} = (h_{ss}k_{ss})^{\alpha}l_{ss}^{1-\alpha}$	Función de producción
[7] $y_{ss} = c_{ss} + i_{ss}$	Equilibrio mercado de bienes
[8] $k_{ss} = (1-\delta_{ss})k_{ss} + (1+\epsilon_{ss})i_{ss}$	Ley de movimiento del capital
[9] $\delta_{ss} = \frac{h_{ss}^{\omega}}{\omega}$	Tasa de depreciación variable
[10] $\epsilon_{ss} = \phi\epsilon_{ss} + \nu_{ss}$	Choque a la inversión

[A] Reducción de las ecuaciones I: en primer lugar, en la *ecuación 10* del cuadro [6.7] se considera que en estado estacionario el choque toma el valor de su media ($\nu_{ss} = 0$). Por tanto, dicha ecuación quedaría:

$$\epsilon_{ss} = \phi\epsilon_{ss} + \underbrace{\nu_{ss}}_{=0}$$

De esta expresión se infiere que el único valor de ϵ_{ss} que resuelve esta ecuación es cero. Por tanto, $\epsilon_{ss} = 0$.

En segundo lugar, de la ecuación de Euler (*ecuación 1*) del cuadro [6.7] se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left(c_{ss} - \frac{l_{ss}^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[\frac{1}{1+\epsilon_{ss}}\right] &= \beta E_t\left(c_{ss} - \frac{l_{ss}^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[r_{ss}h_{ss} + \frac{1-\delta_{ss}}{1+\epsilon_{ss}}\right] \\
1 &= \beta\left[r_{ss}h_{ss} + \frac{1-\delta_{ss}}{1+\underbrace{\epsilon_{ss}}_{=0}}\right] \\
\frac{1}{\beta} &= r_{ss}h_{ss} + 1 - \delta_{ss} \qquad (6.47)
\end{aligned}$$

En tercer lugar, considerando que $\epsilon_{ss} = 0$, la oferta de servicios de capital quedaría:

$$\begin{aligned}
r_{ss} &= \frac{h_{ss}^{\omega-1}}{1+\underbrace{\epsilon_{ss}}_{=0}} \\
r_{ss} &= h_{ss}^{\omega-1} \qquad (6.48)
\end{aligned}$$

En cuarto lugar, la ley de movimiento del capital quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
k_{ss} &= (1-\delta_{ss})k_{ss} + (1+\underbrace{\epsilon_{ss}}_{=0})i_{ss} \\
\delta_{ss}k_{ss} &= i_{ss} \qquad (6.49)
\end{aligned}$$

[B] Reducción de las ecuaciones II: dado que el valor de r_{ss} está en función de h_{ss} (ecuación (6.48)), y que de igual manera δ_{ss} depende de h_{ss} (*ecuación 9* del cuadro [6.7]). Entonces reemplazando ambas expresiones en la ecuación (6.47) se obtiene el valor de h_{ss} en función a los parámetros del modelo.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} &= r_{ss}h_{ss} + 1 - \delta_{ss} \\
\frac{1}{\beta} &= h_{ss}^{\omega-1}h_{ss} + 1 - \frac{h_{ss}^{\omega}}{\omega} \\
\frac{1}{\beta} - 1 &= h_{ss}^{\omega} - \frac{h_{ss}^{\omega}}{\omega} \\
\frac{1}{\beta} - 1 &= h_{ss}^{\omega}(1 - \frac{1}{\omega}) \\
h_{ss} &= \left(\frac{\frac{1}{\beta} - 1}{1 - \frac{1}{\omega}}\right)^{\frac{1}{\omega}} \qquad (6.50)
\end{aligned}
$$

Con el valor de h_{ss} se puede obtener el valor de r_{ss} y de δ_{ss}. Por tanto hasta aquí se tiene el valor de estado estacionario de las siguientes variables:

$\epsilon_{ss} = 0$	$h_{ss} = \left(\frac{\frac{1}{\beta}-1}{1-\frac{1}{\omega}}\right)^{\frac{1}{\omega}}$	$r_{ss} = h_{ss}^{\omega-1}$	$\delta_{ss} = \frac{h_{ss}^{\omega}}{\omega}$

[C] Reducción de las ecuaciones III: para obtener el valor de estado estacionario de las demás variables se procurará trabajar con ratios. Dado que se tiene el valor de estado estacionario de la tasa de interés, entonces es útil empezar por una ecuación que la contenga como la demanda de servicios de capital.

$$
\begin{aligned}
r_{ss} &= \alpha\frac{y_{ss}}{h_{ss}k_{ss}} \\
\text{Reemplazando la función de producción} &: \\
r_{ss} &= \alpha\frac{(h_{ss}k_{ss})^{\alpha}l_{ss}^{1-\alpha}}{h_{ss}k_{ss}} \\
r_{ss} &= \alpha\left(\frac{h_{ss}k_{ss}}{l_{ss}}\right)^{\alpha-1} \\
\left(\frac{r_{ss}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} &= \frac{h_{ss}k_{ss}}{l_{ss}} \\
\frac{k_{ss}}{l_{ss}} &= \left(\frac{r_{ss}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\frac{1}{h_{ss}} \qquad (6.51)
\end{aligned}
$$

La ecuación (6.51) brinda un valor del ratio k_{ss}/l_{ss}. Por tanto, es útil encontrar ratios de las demás variables en función a este k_{ss}/l_{ss}. En primer lugar, de la ley de movimiento del capital (ecuación (6.49)) se obtiene i_{ss}/l_{ss}:

$$
\begin{aligned}
\delta_{ss}k_{ss} &= i_{ss} \\
\text{Se reemplaza la expresión de } \delta_{ss} &: \\
\frac{h_{ss}^{\omega}}{\omega}k_{ss} &= i_{ss} \\
\frac{i_{ss}}{l_{ss}} &= \frac{h_{ss}^{\omega}}{\omega}\left[\frac{k_{ss}}{l_{ss}}\right] \qquad (6.52)
\end{aligned}
$$

En segundo lugar, de la función de producción se obtiene el ratio y_{ss}/l_{ss}:

$$\begin{aligned}
y_{ss} &= (h_{ss}k_{ss})^{\alpha} l_{ss}^{1-\alpha} \\
\frac{y_{ss}}{l_{ss}} &= (h_{ss}k_{ss})^{\alpha} l_{ss}^{-\alpha} \\
\frac{y_{ss}}{l_{ss}} &= \left(\frac{k_{ss}}{l_{ss}} h_{ss}\right)^{\alpha} \qquad (6.53)
\end{aligned}$$

En tercer lugar, en el equilibrio de mercado de bienes se obtiene el ratio c_{ss}/l_{ss}:

$$\begin{aligned}
y_{ss} &= c_{ss} + i_{ss} \\
\frac{y_{ss}}{l_{ss}} &= \frac{c_{ss}}{l_{ss}} + \frac{i_{ss}}{l_{ss}} \\
\frac{c_{ss}}{l_{ss}} &= \frac{y_{ss}}{l_{ss}} - \frac{i_{ss}}{l_{ss}} \qquad (6.54)
\end{aligned}$$

En cuarto lugar, de la demanda de trabajo se obtiene el valor de w_{ss}:

$$\begin{aligned}
w_{ss} &= (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{l_{ss}} \\
w_{ss} &= (1-\alpha)\frac{(h_{ss}k_{ss})^{\alpha} l_{ss}^{1-\alpha}}{l_{ss}} \\
w_{ss} &= (1-\alpha)\left(\frac{h_{ss}k_{ss}}{l_{ss}}\right)^{\alpha} \qquad (6.55)
\end{aligned}$$

Dado que se conoce el valor de k_{ss}/l_{ss} (ecuación (6.51)) y el valor de h_{ss}, entonces el salario real en estado estacionario queda definido por la ecuación (6.55). Finalmente, de la oferta de trabajo se obtiene el valor de l_{ss}:

$$\begin{aligned}
l_{ss}^{\theta} &= w_{ss} \\
l_{ss} &= (w_{ss})^{1/\theta} \qquad (6.56)
\end{aligned}$$

Desarrollando la ecuación (6.56) se tiene:

$$\begin{aligned}
l_{ss} &= (\underbrace{w_{ss}}_{\text{Ec. (6.55)}})^{1/\theta} \\
l_{ss} &= \left((1-\alpha)\left(\frac{h_{ss}k_{ss}}{l_{ss}}\right)^{\alpha}\right)^{1/\theta} \\
l_{ss} &= \left((1-\alpha)\left(h_{ss}\underbrace{\frac{k_{ss}}{l_{ss}}}_{\text{Ec. (6.51)}}\right)^{\alpha}\right)^{1/\theta} \\
l_{ss} &= \left((1-\alpha)\left(h_{ss}\left(\frac{r_{ss}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\frac{1}{h_{ss}}\right)^{\alpha}\right)^{1/\theta} \\
l_{ss} &= \left((1-\alpha)\left(\frac{r_{ss}}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{1/\theta} \qquad (6.57)
\end{aligned}$$

Dado que se tiene el valor de l_{ss}, entonces de las ecuaciones previas se puede encontrar el capita, la inversión, el producto, el consumo y el salario real (ver las ecuaciones (6.51) al (6.55)). En el cuadro [6.8] se indica la expresión del estado estacionario de cada variable del modelo.

Cuadro 6.8: Estado estacionario

Estado estacionario (forma recursiva)
$\epsilon_{ss} = 0$
$h_{ss} = \left(\frac{\frac{1}{\beta}-1}{1-\frac{1}{\omega}}\right)^{\frac{1}{\omega}}$
$r_{ss} = h_{ss}^{\omega-1}$
$\delta_{ss} = \frac{h_{ss}^{\omega}}{\omega}$
$l_{ss} = \left((1-\alpha)\left(\frac{r_{ss}}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{1/\theta}$
$k_{ss} = l_{ss}\left(\frac{r_{ss}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\frac{1}{h_{ss}}$
$i_{ss} = \frac{h_{ss}^{\omega}}{\omega}k_{ss}$
$y_{ss} = (h_{ss}k_{ss})^{\alpha}l_{ss}^{1-\alpha}$
$c_{ss} = y_{ss} - i_{ss}$
$w_{ss} = (1-\alpha)\frac{y_{ss}}{l_{ss}}$

Solución del modelo

El cuadro [6.12] contiene las 10 ecuaciones y 10 variables del modelo. Este sistema de ecuaciones es no-lineal. Al introducirlo en Dynare, este sistema será linealizado. Con el fin que el sistema sea log-linealizado por Dynare se procede a escribir en Dynare cada variable como: $exp(xx)$, donde $xx = lnx_t$. Por ejemplo, la oferta de servicios de capital quedará expresado en Dynare de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\text{Oferta de servicios de capital} &: \text{“en el modelo”} \\
r_t &= \frac{h_t^{\omega-1}}{1+\epsilon_t} \\
\text{Oferta de servicios de capital} &: \text{“en Dynare”} \\
exp(rr) &= \frac{exp(hh)^{\omega-1}}{1+exp(\epsilon\epsilon)}
\end{aligned}$$

Al realizar este cambio de variable, Dynare linealizará el modelo y obtendrá una variable en log desviaciones de su estado estacionario de la siguiente manera: $\widehat{x}_t = xx_t - xx_{ss} = lnx_t - lnx_{ss}$. La variable $\widehat{x}_t$ será la que Dynare utilice para calcular el estado estacionario, la función de política y de estado, la función impulso-respuesta y los momentos teóricos.

El cuadro [6.9] y [6.10] muestran la solución del modelo (función de política y de estado) para dos conjuntos de valores de los parámetros. El primer cuadro corresponde al modelo con $\gamma = 1$, $\phi = 0.47$ y $\sigma_v = 0.05$, mientras que el segundo cuadro considera $\gamma = 2$,

$\phi = 0.51$ y $\sigma_v = 0.0515$. Cabe mencionar que la diferencia importante entre ambos ejercicios es la ESIC (γ), ya que los valores de la persistencia (ϕ) y del choque (σ_v) son muy similares entre ambos. Por tanto, las diferencias entre los coeficientes en la solución de cada variable endógena responderá principalemente a γ.

[A] Modelo 1 ($\gamma = 1$): en el cuadro [6.9] se observa que la función de política del consumo está expresado como:

$$lnc_t = -0.7612 + 0.3788\widehat{k}_t - 0.007\widehat{e}_{t-1} - 0.0148\nu_t \quad (6.58)$$

$$lnc_t = lnc_{cc} + 0.3788\widehat{k}_t - 0.0148(\frac{0.007}{0.0148}\widehat{e}_{t-1} + \nu_t) \quad (6.59)$$

$$lnc_t - lnc_{cc} = 0.3788\widehat{k}_t - 0.0148(0.47\widehat{e}_{t-1} + \nu_t) \quad (6.60)$$

$$\widehat{c}_t = 0.3788\widehat{k}_t - 0.0148\widehat{e}_t \quad (6.61)$$

En la función de política del consumo, ecuación (6.61), se observa que el choque a la inversión $\widehat{e}_t$ afecta negativamente al consumo en el mismo periodo. Esto indica que bajo una alta elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, dicha variable no reacciona positivamente ante un choque a la inversión. En contraste, la función de pólítica de la todas las demás variables, excepto de la tasa de interés, reaccionan positivamente ante el choque a la inversión, lo cual está acorde a los datos. Cabe mencionar que aunque el consumo se reduce, lo hace en menor maginitud en comparación con el modelo de Campbell (1994). Por ejemplo, el modelo de Campbell (1994) indica que la elasticidad del consumo-choque a la inversión es igual a -0.25 en contraste con este modelo -0.014.

Cuadro 6.9: Función de política y de estado (Modelo 1 ($\gamma = 1$))

	lnc_t	lni_t	lny_t	lnk_{t+1}	lnl_t	lnh_t	lnr_t	lnw_t	lnd_t	lne_t
Constante	-0.7612	-2.1213	-0.5327	0.8824	-0.5470	-1.3802	-1.2728	-0.3282	-2.3106	0
$\widehat{k}_t$	0.3788	-0.2828	0.2437	0.9478	0.1523	-0.5326	-0.2237	0.0914	-0.7563	0
$\widehat{e}_{t-1}$	-0.0070	0.6947	0.1363	0.0554	0.0852	0.2615	-0.1252	0.0511	0.3713	0.47
ν_t	-0.0148	1.4782	0.2901	0.1179	0.1813	0.5564	-0.2663	0.1088	0.7901	1

Nota: los resultados se han obtenido de "modelo_ghh_log1"

[B] Modelo 2 ($\gamma = 2$): del cuadro [6.10] muestra la función de política y de estado del modelo bajo el supuesto de $\gamma = 2$. Esta menor elasticidad permite que el consumo reaccione positivamente ante el choque a la inversión (elasticidad c_t-e_t es igual a 0.0775), permitiendo que la correlación entre el consumo y la inversión sea positiva y que el consumo se procíclico. Asimismo, al igual que en el modelo con $\gamma = 1$, la respuesta de las demás variables tienen el signo observado en los datos.

Cuadro 6.10: Función de política y de estado (Modelo 2 ($\gamma = 2$))

	lnc_t	lni_t	lny_t	lnk_{t+1}	lnl_t	lnh_t	lnr_t	lnw_t	lnd_t	lne_t
Constante	-0.7612	-2.1213	-0.5327	0.8824	-0.5470	-1.3802	-1.2728	-0.3282	-2.3106	0
$\widehat{k}_t$	0.3299	-0.0924	0.2437	0.9667	0.1523	-0.5326	-0.2237	0.0914	-0.7563	0
$\widehat{e}_{t-1}$	0.0395	0.5703	0.1479	0.0419	0.0925	0.2838	-0.1358	0.0555	0.4029	0.51
ν_t	0.0775	1.1182	0.2901	0.0822	0.1813	0.5564	-0.2663	0.1088	0.7901	1

Nota: los resultados se han obtenido de "modelo_ghh_log1"

6.3.2. Análisis de la solución

Funciones impulso-respuesta

A continuación se analiza la respuesta de las variables endógenas en "t" ante un choque a la inversión en el mismo periodo.

[A] Primer efecto: en primer lugar, el choque se materializa en el periodo "t". Antes de este periodo, las variables se encuentran en su estado estacionario. Por ejemplo, el choque toma el valor de su media ($\nu_{t-1} = 0$), mientras que el consumo toma el valor de cero ($\widehat{c}_t = 0$). Recordemos que $\widehat{c}_t$ es la desviación del logarítmo de la variable con respecto al logarítmo de su estado estacionario: $\widehat{c}_t = lnc_t - lnc_{ss}$. Por tanto, cuando $\widehat{c}_t = 0$ implica que $c_t = c_{ss}$; es decir, que la variable se encuentra en sus estado estacionario.

En segundo lugar, un incremento en el choque a la inversión se materializa en el periodo "t", lo cual significa que ν_t toma el valor de su desviación estándar (σ_v) y por tanto saca del estado estacionario a $\epsilon_t(\uparrow)$. Este choque tiene tres efectos iniciales: el primero es en la ecuación de Euler, el segundo en la ley de movimiento del capital y el tercero en la oferta de servicios de capital.

Ecuación de Euler: el choque a la inversión influye sobre la sustitución intertemporal del consumo. Un incremento en el choque a la inversión $\uparrow \epsilon_t$ incentiva a que la familia representativa a sustituir su consumo actual por consumo futuro, lo cual se refleja en $\downarrow c_t$ y $\uparrow c_{t+1}$.

$$\left(c_t - \frac{l_t^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[\frac{1}{1+\uparrow \epsilon_t}\right] = \beta E_t\left(c_{t+1} - \frac{l_{t+1}^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\gamma}\left[r_{t+1}h_{t+1} + \frac{1-\delta_{t+1}}{1+\epsilon_{t+1}}\right] \tag{6.62}$$

Ley de movimiento del capital: un incremento en el choque a la inversión $\uparrow \epsilon_t$ incentiva que la producción de nuevo capital en "t+1" se incremente.

$$\uparrow k_{t+1} \underbrace{=}_{\leftarrow} (1-\delta_t)k_t + (1+\uparrow \epsilon_t)i_t \tag{6.63}$$

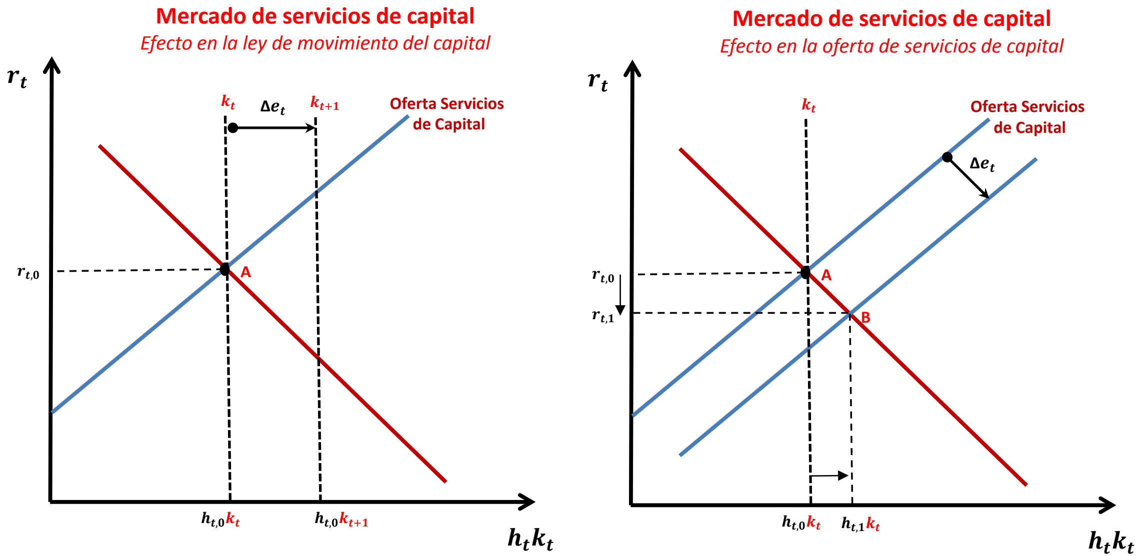
Oferta de servicios de capital: esta ecuación es muy importante en el modelo. A diferencia del modelo RBC estándar como el de Campbell (1994), en la cual no existe diferencia entre la oferta de capital y la oferta de servicios de capital (ambos perfectamente inelástica), en el modelo de Greenwood et al (1988) ambas ofertas son distintas. En primer lugar, la oferta de capital k_t es perfectamente inelástica como en el modelo de Campbell (1994), dado que esta representa el stock de capital de la economía y es una variable predeterminada en

"t". En segundo lugar, la oferta de servicios de capital $h_t k_t$ tiene pendiente positiva (con respecto a la tasa de interés) debido a que un incremento en la inversión incentiva a las familias a ofrecer una mayor utilización del capital $\uparrow h_t$. Esto se observa con mayor claridad en la oferta de servicios de capital:

$$r_t = \frac{h_t^{\omega-1}}{1+\epsilon_t}$$
$$(1+\uparrow \epsilon_t) r_t \underbrace{=}_{\rightarrow} \uparrow h_t^{\omega-1} \tag{6.64}$$

Por tanto, un choque a la inversión positivo mueve hacia la derecha (expande) la oferta de servicios de capital (ver figura [6.5]).

Figura 6.5: Efectos del choque a la inversión en el mercado de servicios de capital

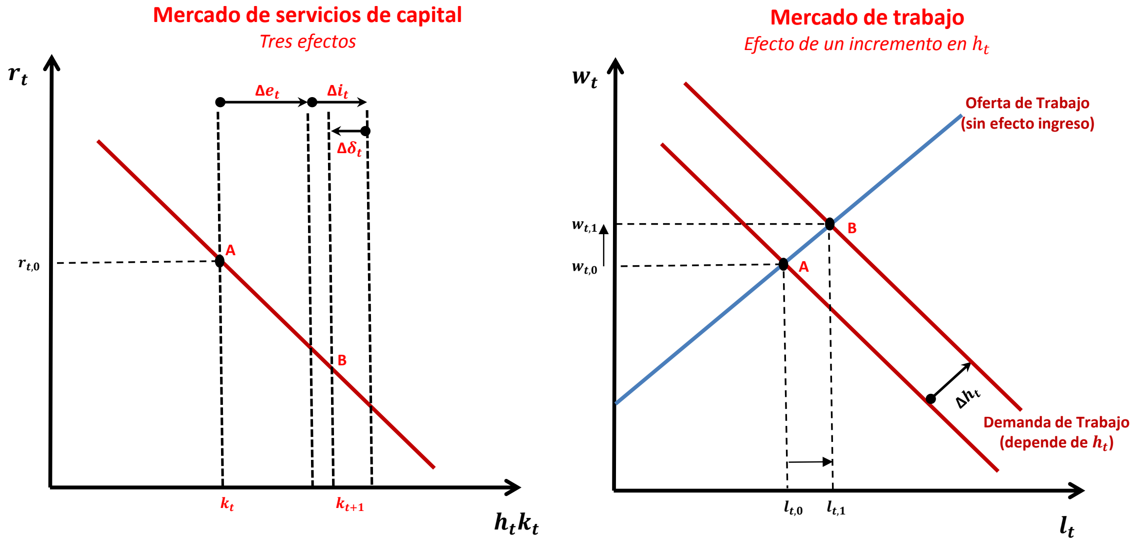


[B] Segundo efecto: en primer lugar, dado que el consumo se contrae en "t" y la inversión ha llegado a ser más productiva, entonces la familia representativa incrementa la inversión $\uparrow i_t$. Este incremento adiciona un efecto positivo a la oferta de bienes de capital en "t+1". Cabe notar que la reducción del consumo no impacto sobre la oferta de trabajo como en el modelo de Campbell (1994). Esto se debe a que la función de utilidad que se considera en el modelo de Greenwood et al (1988) elimina la presencia del consumo en la oferta de trabajo. Tal como se mencionó antes, la forma de esta función de utilidad elimina el efecto riqueza sobre la oferta de trabajo. Los efectos de este supuesto es que impide que el salario real se reduzca.

En segundo lugar, el incremento de la utilización del capital tiene efectos sobre la demanda de trabajo debido a que ambos factores son complementarios. A diferencia de la demanda de servicios de capital, en la cual un movimiento de h_t implica un movimiento *en la misma curva* de la demanda de capital (no un desplazamiento); en la demanda de

trabajo, un movimiento de h_t *desplaza* dicha curva[1]. Por tanto, una mayor utilización del capital implica la expansión de la demanda de trabajo, la cual en equilibrio lleva al incremento de las horas trabajadas $\uparrow l_t$ y del salario real $\uparrow w_t$ (ver figura [6.6]).

Figura 6.6: Efectos del choque a la inversión en la oferta de capital y el mercado de trabajo



En tercer lugar, la mayor utilización del stock de capital produce que una mayor depreciación, lo cual afecta negativamente a la acumulación de capital del siguiente periodo. Entonces, se observa que:

$$\uparrow \epsilon_t \rightarrow \uparrow h_t \rightarrow \uparrow \delta_t \rightarrow \downarrow h_{t+1}$$

Esto se aprecia en la ley de movimiento del capital:

$$\downarrow k_{t+1} \underbrace{=}_{\leftarrow} (1- \uparrow \delta_t)k_t + (1+\epsilon_t)i_t \tag{6.65}$$

Por tanto, un incremento del choque a la productividad tiene tres efectos sobre k_{t+1}:

$$\uparrow \epsilon_t \rightarrow \uparrow k_{t+1} \tag{6.66}$$
$$\uparrow \epsilon_t \rightarrow \uparrow i_t \rightarrow \uparrow k_{t+1} \tag{6.67}$$
$$\uparrow \epsilon_t \rightarrow \uparrow h_t \rightarrow \uparrow \delta_t \rightarrow \downarrow k_{t+1} \tag{6.68}$$
(6.69)

En cuarto lugar, la reducción de la tasa de interés en "t" ($\downarrow r_t$), el incremento de los servicios de capital ($\uparrow h_t k_t$) y el incremento de los ingresos laborales ($\uparrow w_t l_t$), en conjunto

[1]Cabe mencionar que estos movimientos son distintos en el caso de un choque de productividad a_t. En ese caso, ambas demandas (trabajo y capital) se expanden debido a que a_t no afecta la pendiente de dichas curvas.

producen un efecto ingreso positivo en la restricción presupuestaria de la familia representativa. Estos mayores ingresos incrementan el consumo ($\uparrow c_t$).

Finalmente, en el periodo "t+1" los efectos del choque se mantienen, debido a su persistencia, pero con menor magnitud. En este periodo, la tasa de interés r_{t+1} se contrae pero en menor proporción que en "t". Esta reducción de la tasa de interés produce un efecto sutitución sobre el consumo actual: la familia ante una reducción de la tasa de interés en "t+1" reduce su consumo en "t" ($\downarrow c_t$) e incrementa su consumo en "t+1" ($\downarrow c_{t+1}$). Esto se debe a que la "ganancia (r_{t+1})" de desprenderse de una unidad de consumo en "t" ha disminuido.

[C] Resumen de efectos: en primer lugar, como se ha mencionado previamente, el choque a la inversión tiene tres efectos sobre el stock de capital de "t+1". Los dos primeros lo incrementan ($\uparrow \epsilon_t$ y $\uparrow i_t$) y el tercero lo reduce ($\uparrow \delta_t$). En el neto, el stock de capital en "t+1" se incrementa.

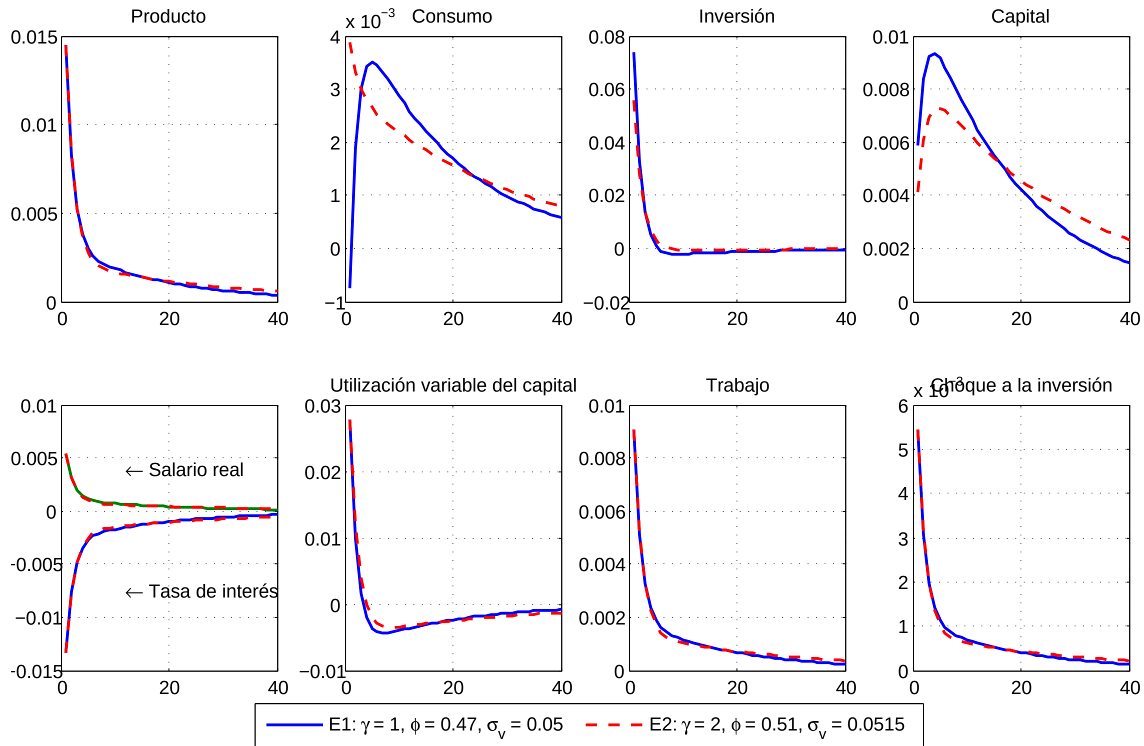
En segundo lugar, dado que no existe efecto ingreso en la oferta de trabajo, el salario real y las horas trabajas son mayores en equilibrio después de choque a la inversión. En tercer lugar, en el mercado de servicios de capital, solo la oferta se expande debido al choque a la inversión llevando a una mayor utilización del capital. En este mercado la demanda no se desplaza en "t", solo se ajusta a lo largo de la curva. En el equilibrio, la tasa de interés real se contrae y la utilización del capital se incrementa.

En cuarto lugar, el choque a la inversión tiene tres efectos sobre el consumo actual. El primero se obtiene de manera directa en la ecuación de Euler, el choque a la inversión reduce el consumo actual ($\downarrow c_t$), este efecto se puede entender como un "efecto sustitución intratemporal". El segundo se obtiene por medio del "efecto riqueza", los ingresos laborales y de servicios de capital se incrementan haciendo más rico a la familia. Este efecto riqueza lleva a un incremento del consumo actual ($\uparrow c_t$). Finalmente, en el periodo "t+1", la tasa de interés se mantiene por debajo del estado estacionario, lo cual incentiva por medio del efecto sustitución a un aumento del consumo en "t" ($\uparrow c_t$), esto se puede entender como el "efecto sustitución intertemporal".

[D] Función impulso-respuesta: la figura [6.7] muestra la función impulso-respuesta el modelo de Greenwood et al (1988) bajo dos escenarios. La principal diferencia entre ambos es la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo (ESIC $= 1/\gamma$). Aunque ambos escenarios también consideran diferente persistencia y magintud del choque; no obstante, dichas diferencias son marginales. La principal conclusión de la comparación de estos dos escenarios es que una menor elasticidad de sustitución modera la reducción del consumo ante un choque a la inversión (efecto de sustitución intratemporal). Esto permite que el efecto ingreso y el efecto de sustitución intertemporal (por una reducción de r_{t+1}) superen la reducción del consumo. En el neto, el consumo aumenta cuando ESIC es menor.

De otro lado, se obseva que cuando el consumo aumenta en el periodo actual, la inversión se incrementa pero en menor magnitud. Este incremento moderado de la inversión tiene efectos sobre el stock de capital en "t+1", el cual es menor que en el caso de ESIC más alta. Finalmente, las demás variables no son afectadas por la ESIC.

Figura 6.7: Modelo de Greenwood et al (1988) - Choque a la inversión



Nota: esta figura se obtiene del archivo "modelo_ghh_log1.mod".

[E] Comparación de modelos: la figura [6.8] muestra la comparación entre el modelo de Campbell (1994), que considera utilización del capital fijo, y el modelo de Greenwood at al (1988), el cual considera utilización del capital variable. Ambos modelos mantienen la misma calibración y están sujetos a un choque a la inversión. Las principales diferencias se mencionan a continuación.

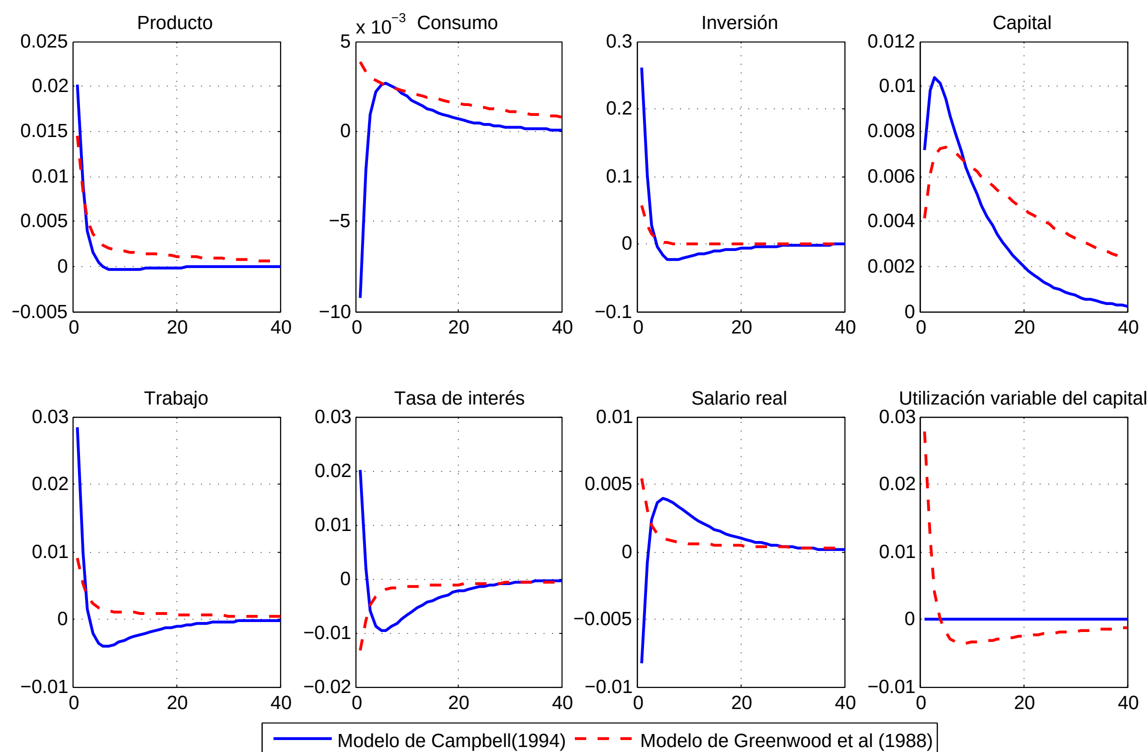
En primer lugar, el producto en el modelo de Campbell (1994) es ligeramente mayor al modelo de Greenwood et al (1988). Esto se debe a que en el primer modelo el incremento del trabajo es casi tres veces el incremento del segundo modelo. No obstante, esta ausencia de respuesta del trabajo en el segundo modelo es contrarestado por el incremento de la utilización del capital.

En segundo lugar, el consumo en el modelo de Campbell (1994) se contrae, en contraste con el incremento de esta variable en el modelo de Greenwood et al (1988). En ambos modelos el choque a la inversión tiene tres efectos sobre el consumo actual: el primero es la sustitución intratemporal que permite un incremento del consumo, similar en ambos modelos. El segundo es el efecto riqueza que también incrementa el consumo actual, similar en ambos modelos. El tercero es el efecto de sutitución intertemporal, el cual es distinta para cada modelo. En el modelo de Campbell (1994), el incremento de la demanda de capital, bajo una oferta perfectamente inelástica, aumenta la tasa de interés real, la cual se mantiene por encima del estado estacionario en el periodo "t+1". Este incremento de

la tasa de interés en "t+1" induce a la familia a reducir su consumo en "t". Por tanto, el efecto de sustitución intertemporal en el modelo de Campbell (1994) reduce el consumo. En contraste con lo anterior, en el modelo de Greenwood et al (1988) la curva que se expande no es la demanda de capital sino la oferta de *servicios de capital*, la cual en equilibrio produce un nivel de tasa de interés por debajo del estado estacionario. Este nivel, pero en menor margnitud, se mantiene en el periodo "t+1", lo cual induce a la familia a incrementar su consumo en "t". Por tanto, el efecto de sustitución intertemporal en el modelo de Greenwood et al (1988) incrementa el consumo.

En tercer lugar, la inversión se incrementa en ambos modelos aunque en menor proporción en el modelo de Greenwood et al (1988). Esta menor volatilidad responde a que los recursos son destinados a un incremento del consumo, lo cual deja menos recursos para la inversión. Esto es distinto al modelo de Campbell (1994), en el cual el consumo se reduce por el incremento de la tasa de interés, la cual hace más atractiva la inversión. Esta reducción del consumo incentiva una mayor distribución de recursos hacia la inversión. Un efecto directo de la menor inversión es la menor acumulación de capital tal como se observa en la función impulso-respuesta del capital.

Figura 6.8: Modelo utilización variable (Greenwood et al, 1988) vs Modelo utilización fija (Campbell, 1994)



Nota: el modelo de Greenwood et al (1988) considera $\gamma = 2$, $\phi = 0.51$ y $\sigma_v = 0.515$. Además, el modelo de Campbell (1994) mantiene la misma calibración para que ambos modelos sean comparables. Este gráfico corresponde a un choque a la inversión. Esta figura se obtiene del archivo "Campbell_vs_GHH.m".

En cuarto lugar, en el mercado de trabajo se observan similitudes y diferencias entre el modelo de Campbell (1994) y el modelo de Greenwood et al (1988). La princial similitud es que el número de horas trabajadas se incrementa en ambos modelos, aunque con menor magnitud en el modelo de Greenwood et al (1988) debido a que la oferta de trabajo no está sujeta al efecto riqueza (c_t no está presente en dicha oferta). La principal diferencia es que el salario real se incrementa en el modelo de Greenwood et al (1988), pero se reduce en el modelo de Campbell (1994). La reducción del salario real en el modelo de Campbell (1994) se debe a que la oferta de trabajo se expande por el efecto riqueza presente (dado que el consumo se contrae, entonces la familia decide trabajar más). Este movimiento de la curva está ausente en el modelo de Greenwood et al (1988).

Comparación del modelo teórico con los datos

En el cálculo de los estadísticos empíricos, Greenwood et al (1988) utiliza datos anuales comprendidos entre 1948 y 1985 inclusive. Además, el proceso de extracción del componente cíclico tanto en los datos como en el modelo es por medio de "tendencia lineal cuadrática". Esto es un diferencia importante con el método usual de separar la tendencia de los modelos RBC, quienes utilizan el filtro Hodrick-Prescott.

El cuadro [6.11] muestra los momentos empíricos y teóricos de cada una de las variables del modelo. Dado que en secciones previas se ha considerado la función de política y la función impulso-respuesta de dos modelos ($\gamma = 1$ vs $\gamma = 2$), en esta sección se muestra los momentos obtenidos de cada uno de estos modelos. Cabe mencionar que los momentos teóricos derivados del modelo son obtenidos de una simulación y sin aplicar ningun filtro. Por ello, las desviaciones estándar no son comparables con los datos, pero si la correlación y autocorrelación.

La principal conclusión que emerge del cuadro [6.11] es que el modelo con $\gamma = 2$ (menor ESIC) permite obtener dos hechos estilizados que el modelo RBC estándar no podía: el primero es que la correlación del consumo con la inversión es positiva, y el segundo es que el consumo es procíclico. Una segunda conclusión es que, en general, los momentos inferidos por el modelo se acercan a lo observado en los datos. Finalmente, todos estos valores son obtenidos considerando una persistencia del choque a la inversión ($\phi = 0.51$) menor en comparación con los modelos RBC estándar ($\phi = 0.9$).

6.4. Códigos

En el cuadro [6.12] se menciona los códigos de Matlab y de Dynare que se han utilizado en este capítulo.

Cuadro 6.11: Comparación del comportamiento cíclico del modelo teórico con los datos empíricos

	Datos			Modelo							
				Modelo 1 ($\gamma = 1$)				Modelo 2 ($\gamma = 2$)			
Variable (x_t)	$(1)^a$	$(2)^b$	$(3)^c$	$(1)^a$	$(2)^b$	$(3)^c$	$(4)^d$	$(1)^a$	$(2)^b$	$(3)^c$	$(4)^d$
Consumo	2.20	0.74	0.72	1.27	0.51	0.97	1.00	1.21	0.80	0.95	1.00
Inversión	10.50	0.68	0.25	8.27	0.86	0.44	-0.01	6.46	0.90	0.50	0.46
Producto	3.50	1.00	0.66	1.96	1.00	0.66	0.51	1.96	1.00	0.66	0.80
Capital				3.38	0.71	0.98	0.97	3.20	0.65	0.99	0.97
Trabajo	2.10	0.81	0.39	1.22	1.00	0.66	0.51	1.23	1.00	0.66	0.80
Tasa de utilización				3.36	0.55	0.48	-0.44	3.42	0.61	0.53	0.01
Tasa de interés				1.80	-1.00	0.66	-0.51	1.80	-1.00	0.66	-0.80
Salario real	2.20	0.82	0.77	0.73	1.00	0.66	0.51	0.74	1.00	0.66	0.80
Depreciación				4.77	0.55	0.48	-0.44	4.86	0.61	0.53	0.01

Nota: Los valores empíricos han sido tomado de Greenwood et al (1988), quienes consideran las variables en logarítmo y han extraido la tendencia por medio de una tendencia temporal lineal-cuadrática. Los valores teóricos se han obtenido de una sola simulación y no se ha aplicado ningún filtro para obtener el componente cíclico de las variables. Estos valores se obtiene del archivo “modelo_ghh_log1.mod”.

[a](1)= Desviación estándar (%)
[b](2)= Correlación con el producto
[c](3)= Autocorrelación de primer orden
[d](4)= Correlación con el consumo

Cuadro 6.12: Códigos en Matlab y Dynare

Códigos	Descripción
Matlab	
grafica_depreciacion.m	Este m-file grafica la depreciación en función a la utilización del capital y tres valores de ω.
Campbell_vs_GHH.m	Grafica la función impulso-respuesta del modelo de Campbell (1994) vs Greenwood et al (1988). Ambos modelos tienen la misma calibración propuesta por Greenwood et al (1988).
Dynare	
modelo_ghh_log1.mod	Replica el modelo de Greenwood et al (1988). Además, simula el modelo para dos escenarios: E1 ($\gamma = 1$, $\phi = 0.47$, $\sigma_v = 0.05$) y E2 ($\gamma = 2$, $\phi = 0.51$, $\sigma_v = 0.0515$).
modelo_ghh_log2.mod	Es el mismo modelo de “modelo_ghh_log1.mod” pero con algunos parámetros para reproducir un modelo RBC con utilización fija.
Campbell_Lvariable_nolineal_log5_inv.mod	Es el mismo mod “Campbell_Lvariable_nolineal_log5.mod” del capítulo 5, solo con la diferencia que este tiene choque a la inversión para compararlo con el modelo de Greenwood et al (1988).